Fonctions dérivables et formules de Taylor
notes de cours d'Olivier Sester
2024–2025

On considère dans ce chapitre I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $a \in \mathrm{I}$.

I. Dérivée d'une fonction

Définition 1

Soit f une fonction réelle définie sur I. On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement de f en a, noté τ_a et défini sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ par :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie en a. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Dans cette définition, τ_a est une fonction définie *a priori* sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, la limite s'entend donc au sens du chapitre précédent, c'est-à-dire pour des $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté on peut préciser $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \tau_a(x)$.

On observe qu'une fonction dérivable en a est automatiquement continue en a. Comme la continuité, la dérivabilité est une notion locale dans le sens où elle ne dépend que des propriétés de la fonction au voisinage du point considéré.

De la même façon, si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^d$ est une fonction à valeurs vectorielles, alors $f = (f_1, f_2, \dots, f_d)$, f est dérivable en $a \in \mathrm{I}$ si chacune des fonctions coordonnées f_i l'est.

Exercice 1. *La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable en 0 ?*

Définition 2

On dit que $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si f est dérivable et si $f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue. Plus généralement, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathscr{C}^n$ si f est n-fois dérivable et $f^{(n)} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 2. *La fonction*

$$\begin{cases} f(x) & = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) & = 0 \end{cases}$$

est-elle continue, dérivable, $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$?

Proposition 1

La dérivation est une opération linéaire par ailleurs le produit et le quotient de deux fonctions dérivables non nulles est encore dérivable :

$$(fg)' = f'g + g'f \qquad \text{et si } g \neq 0, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Exercice 3. *(Grand classique, à connaître impérativement)*
Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ pour $t \neq 0$ et $f(0) = 0$.
1) Montrer qu'il existe un polynôme P_k de degré inférieur ou égal à $2(k-1)$ tel que

$$f^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{P}_k(x)}{x^{3k}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

2) Déterminer $f^{(k)}(0)$.
3) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit f une bijection continue d'un intervalle I sur $f(\mathrm{I})$, dérivable en a. La fonction réciproque $g = f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$, si et seulement si $f'(a) \neq 0$, on a alors

$$g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Attention à ne pas écrire, comme on le voit parfois, $g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$ mais bien $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ avec $x \in \mathrm{J}$. Cette formule se retrouve en dérivant l'identité $x = f(g(x))$ (mais ceci ne constitue pas une démonstration).
Réviser : *Les notions de dérivée à droite dérivée à gauche.*

Exercice 4. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, dérivable à droite en 0. Déterminer*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n^2}\right).$$

Appliquer le résultat à $f(x) = \sin(x)$.

***Proposition 2* – (ormule de Leibnitz**

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I, alors le produit fg est n fois dérivable et

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)}(x) g^{(n-p)}(x).$$

Exercice 5. *On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction polynôme*

$$\mathrm{L}_n : t \mapsto \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$

Calculer $\mathrm{L}_n(1)$.

Exercice 6. *Calculer la dérivée d'ordre n de $x^n(1-x)^n$. En déduire*

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2.$$

Condition nécessaire d'extremum local *: Soient I un intervalle* **ouvert** *de $\mathbb{R}$, $c \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable en c. Si c est un extremum local de f alors $f'(c) = 0$.*
Bien évidemment ce n'est qu'une condition nécessaire...

II. Accroissements finis

Théorème 3 – Théorème de Rolle

Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors, il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=0.$$

La preuve de ce théorème est en fait très simple : f étant continue sur $[a,b]$ elle atteint son max et son min sur $[a,b]$. En outre, l'une de ces deux valeurs, est nécessairement atteinte en un point $c\in]a,b[$, sinon f serait constante. Ce point c est alors un extremum de f donc $f'(c)=0$ d'après le résultat précédent.

Exercice 7. *Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(a)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$. Montrer qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.*

Exercice 8. *Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, la dérivée n-ième de $x\longmapsto \arctan(x)$ est de la forme*

$$f_n(x)=\frac{\mathrm{P}_n(x)}{(x^2+1)^n}$$

où P_n est un polynôme de degré $n-1$. Montrer que P_n admet $n-1$ racines réelles distinctes.

Théorème 4 – Formule des accroissements finis

Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors, il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Cette formule est en fait une application directe du théorème de Rolle à la fonction $\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. En effet $\varphi(a)=\varphi(b)=f(a)$, donc d'après Rolle il existe $c\in]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Faire un graphe pour interprèter le résultat.

Exercice 9. *a) Établir que pour tout $x\in]0,+\infty[$*

$$\frac{1}{1+x}<\ln(1+x)-\ln(x)<\frac{1}{x}.$$

b) Pour $k\geq 2$, on définit une suite de réels $(u_n)_{n\geq 1}$ par

$$u_n=\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}.$$

Déduire de a) que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

Une conséquence du théorème des accroissements finis est le résultat suivant :

Théorème 5 – Théorème de prolongement de la dérivée

Soient I un intervalle et $a\in\mathrm{I}$. Si f est une fonction continue sur I, f est dérivable sur $\mathrm{I}\setminus\{a\}$ et si $f'_{|\mathrm{I}\setminus\{a\}}$ admet une limite finie ℓ en a, alors f est dérivable en a, $f'(a)=\ell$ et f' est continue en a.

Exercice 10. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a)=f(b)$ et $f'(a)=0$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que*

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

On pourra considérer la fonction $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Exercice 11. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$ nulle en a et b. Montrer que pour tout $c\in[a,b]$, il existe $d\in]a,b[$ tel que*

$$f(c)=(c-a)(c-b)\frac{f''(d)}{2}.$$

(On pourra introduire la fonction $\varphi(t)=f(t)-(t-a)(t-b)\frac{A}{2}$ avec A bien choisi.)
En déduire que pour toute fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$ il existe $d\in]a,d[$ tel que

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-f(\frac{a+b}{2})=\frac{(b-a)^2}{8}f''(d).$$

Interpolation de Lagrange

Soient $f:I=[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $a_1,\ldots a_n$, n points disctincts de I. On appelle polynôme interpolateur de Lagrange le polynôme

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}.$$

C'est l'unique polynôme de degré au plus $n-1$ tel que $f(a_i)=P(a_i)$ pour tout i.

Proposition 6

On suppose f de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$, alors pour tout x de $[a,b]$, il existe $u=u_x\in[a,b]$ tel que

$$f(x)-P(x)=\frac{f^{(n)}(u)}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

Pour la preuve, on peut considérer à x fixé l'application $g(t)=f(t)-P(t)-A\prod_{i=1}^{n}(t-a_i)$ avec A bien choisie.
On en déduit la majoration si $M=\sup_{t\in[a,b]}|f^{(n)}(t)|$

$$\forall x\in[a,b],|f(x)-P(x)|\leq\frac{M}{n!}\prod_{i=1}^{n}|x-a_i|.$$

Jusqu'à présent nous nous sommes limités aux fonctions à valeurs réelles car les énoncés ci-dessus ne sont de fait pas valables pour des fonctions à valeurs vectorielles. Ainsi, le théorème de Rolle et la formule des accroissements finis sont mis en défaut avec l'exemple suivant : $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $f(t)=e^{it}$. On a $f'(t)=ie^{it}$ et $f(0)=f(2\pi)=1$. Pour tout $t\in[0,2\pi]$, $f'(t)$ n'est jamais nul donc f ne peut vérifier aucun des théorèmes ci-dessus.
En revanche, l'inégalité des accroissements finis est tout à fait valide pour les fonctions à valeurs vectorielles.

***Théorème 7* – Inégalité des accroissements finis**

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}^d$ une application continue. On suppose que f est dérivable sur $]a,b[$ et qu'il existe $M>0$ tel que $\|f'(x)\|\leq M$. Alors on a

$$\|f(a)-f(b)\|\leq M|b-a|.$$

Ici $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$, toutes les normes étant équivalentes dans $\mathbb{R}^d$ (voir le chapitre sur les Espaces Vectoriels Normés), l'énoncé ci-dessus est indépendant de la norme choisie quitte à modifier la constante M.
La règle de l'Hospital permet de calculer des limites de formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$ pour des fonctions dérivables. C'est une version simple de l'utilisation des développements limités mais très utile en pratique.

Proposition 8 – Règle de l'Hôpital

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que :
- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$.

$$\text{Si} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \text{ alors } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Voir les exercices, pour la démonstration.

Exercice 12. *Calculer les limites lorsque x tend vers 0 des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \frac{x - \sin(x)}{x^3} \quad g(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$$

III. Fonctions Convexes

Définition 3

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $x_1, x_2 \in I$, $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Une définiton géométriquement équivalente consiste à dire que l'épigraphe de f : $E_f = \{(x,y),\ y \geq f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que si M_1 et $M_2 \in E_f$ alors le segment $[M_1, M_2] \subset E_f$.

Exercice 13. *Inégalité de Jensen. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $p \geq 2$, $(x_1, \dots, x_p) \in [a,b]^p$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$,*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_1^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_1^p \lambda_i f(x_i).$$

Exercice 14. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité dite des pentes pour tous réels $a < b < c$ alors*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
Réciproquement, on peut montrer que si une fonction f vérifie l'inégalité des pentes pour tous réels $a < b < c$ alors f est convexe.

Cette caractérisation revient donc à dire que la fonction pente $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *est croissante pour tout* a *fixé dans* I.
La définition de la convexité ne fait intervenir aucune propriété de régularité sur f. *Cependant lorsque* f *est dérivable on a*

Proposition 9

Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *dérivable est convexe si et seulement si*

$$f(x) \geq f(a) + (x-a) f'(a),$$

pour tout $(x, a) \in \mathrm{I}^2$.

Cette proposition exprime le fait que le graphe d'une fonction convexe est situé au dessus de ses tangentes.
En outre, les fonctions 2-fois dérivable admettent la caractérisation agréable suivante :

Proposition 10

Une fonction f *deux fois dérivable sur un intervalle* I *est convexe si et seulement si* $f^{(2)}(x) \geq 0$.

Exercice 15. *En utilisant la concavité de la fonction logarithme, montrer que pour tout entier* $n \geq 1$ *et pour tous réels positifs* $a_1, \ldots, a_n$, *on a :*

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

Etudier le cas d'égalité.

IV. Formules de Taylor

Soient I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^d$ *une application* n*-fois dérivable en* $a \in \mathrm{I}$. *On appelle polynôme de Taylor en* a *l'expression*

$$\mathrm{P}_{n,a}(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

La différence entre $f(x)$ *et* $\mathrm{P}_{n,a}$ *est appelée le reste de Taylor d'ordre* n. *Les formules de Taylor que nous allons énoncer permettent de contrôler ce reste et d'en donner une estimation. Il est important de bien retenir les conditions de validité de ces différentes formules, certaines ne s'appliquent que pour des fonctions à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *d'autres sont valables dans un cadre vectoriel. Certaines sont de nature locale d'autres ont un caractère plus global. De même, les hypothèses de différentiabilité portant sur* f *peuvent différer. On retiendra que l'hypothèse la plus forte "*f *de classe* $\mathscr{C}^{n+1}$*" sur* I *permet d'appliquer chacune des formules de Taylor ci-dessous à l'ordre* n.

Théorème 11 – Formule de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Cette première formule généralise le théorème des accroissements finis. La formule n'est valable que pour des fonctions **à valeurs réelles**. *Lorsque $a = 0$, on l'appelle habituellement formule de* **Maclaurin** *et elle s'écrit :*

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{n+1!} f^{(n+1)}(\theta x),$$

avec $\theta \in]0,1[$.

Démonstration. On considère l'application

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \ \ x \mapsto f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \ldots - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \mathrm{A}\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où A est une constante choisie telle que $\varphi(a) = 0$. Cette application est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et

$$\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \mathrm{A}\frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Comme $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui implique $\mathrm{A} = f^{(n+1)}(c)$ d'où le résultat car $\varphi(a) = 0$. □

Théorème 12 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$, $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$ et vérifiant $|f^{(n+1)}(t)| \leq \mathrm{M}$ pour tout $t \in]a,b[$. Alors,

$$\left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \mathrm{M}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Un cas particulier important est celui des polynômes. Lorsque $f = \mathrm{P}$ est un polynôme de degré d, alors $f^{(p)}(x) = 0$ dès que $p > d$.
L'une ou l'autre de ces formules donnent

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{(x-a)^k}{k!} \mathrm{P}^{(k)}(a).$$

Tout polynôme de degré d est donc **égale** *à son polynôme de Taylor $\mathrm{P}_{d,a}$ pour tout réel a. Ce résultat est très utile en algèbre notamment.*
Les formules de Taylor sont des outils essentiels en analyse qui servent à de nombreuses occasions. Pour les séries entières par exemple, la formule de Taylor-Lagrange permet d'établir des critères de convergence de ces séries.

Exercice 16. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

***Théorème 13* – Formule de Taylor avec reste intégrale**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors,

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Il est nécessaire de connaitre les démonstrations de ces formules, c'est pourquoi nous avons aussi inclus une preuve de celle avec reste intégral.

Démonstration. La démonstration procède par récurrence. Pour $n = 0$, f est de classe C^1 et la formule se ramène au théorème fondamental du calcul intégral :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt.$$

Supposons maintenant le résultat vrai au rang $n-1$ pour $n \geq 1$,

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt. \tag{1}$$

On intègre ensuite **par parties** le dernier terme en dérivant $f^{(n)}(t)$ et en intègrant $\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$. La relation (1) devient alors

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

□

La dernière formule que nous citerons est de nature locale, elle donne précisément l'existence du développement limité pour les fonctions n-fois dérivables.

***Théorème 14* – Formule de Taylor-Young**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie dans un voisinage V de a et n-fois dérivable en a. Alors, pour tout $x \in \mathrm{V}$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

où $\varepsilon(t)$ est une fonction qui tend vers 0 quand t tend vers 0.

Exercice 17. *Montrer les inégalités suivantes*

$$\arctan x > \frac{x}{1+x^2}, \; \textit{pour } x > 0$$
$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \textit{si } x \geq 0$$
$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \; \textit{si } x > -1.$$

Exercice 18. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ dont la dérivée seconde est majorée. Soit $\mathrm{M}_2=\sup\{f''(t),t\in\mathbb{R}\}$. Montrer que*

$$f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{2}\mathrm{M}_2\geq 0$$

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En déduire que M_2 est positif et que

$$|f'(x)|\leq\sqrt{2\mathrm{M}_2 f(x)}$$

Exercice 19. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que $f^{(2)}(a)\neq 0$.*
1) Montrer que pour h assez petit >0 il existe un unique $\theta_h\in]0,1[$ tel que $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta_h h)$.
2) Déterminer la limite de θ_h lorsque $h\to 0$.

V. Etude locale des fonctions

On considère dans cette section un élément $a\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et des fonctions définies au voisinage de a.

Relations de comparaison

Définition 4

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie dans un voisinage de a telle que $f=g\cdot\varepsilon$ au voisinage de a avec $\lim_{t\to a}\varepsilon(t)=0$. On note alors $f=o(g)$.

Cela revient donc à dire que $f(t)/g(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers a.
Ainsi par exemple,
- $x^2=o(x)$ au voisinage de 0.
- $\ln x=o(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Définition 5

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a on dit que f est équivalente à g en a s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $f(t)=g(t)\cdot(1+\varepsilon(t))$ et $\lim_{t\to a}\varepsilon(t)=0$. On note alors $f\sim g$.

Une façon analogue de définir $f\sim g$ au voisinage de a est de dire que $f-g=o(g)$.
De nombreux d'équivalents sont obtenus grâce à la proposition suivante (qui n'est qu'une reformulation de la dérivabilité au point a !) :

Proposition 15

Si f est une fonction dérivable en $a\in\mathbb{R}$ et si $f'(a)\neq 0$, alors au voisinage de a :

$$f(x)-f(a)\sim f'(a)(x-a).$$

La relation d'équivalence doit être manipulée avec précaution, en particulier elle n'est pas compatible avec l'addition :

$$x+2\sim_{+\infty}x+1 \text{ et } x\sim_{+\infty}x \text{ mais } 2\not\sim_{+\infty}1.$$

En revanche, on a la proposition suivante :

Proposition 16

La relation d'équivalence $\sim$ entre fonctions est compatible avec le produit et la puissance dans le sens où si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$ alors $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$, $f_1/g_1 \sim f_2/g_2$ et $f_1^{\alpha} \sim f_2^{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 20. *Montrer que $\int_0^x e^{t^2}\,dt$ est négligeable devant e^{x^2} au voisinage de $+\infty$.*

Exercice 21. *Déterminer, à l'aide des équivalents, les limites en 0 des fonctions suivantes*

$$f(x) = \frac{x\ln(1+x)}{(\arcsin x)^2} \quad h(x) = \frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4}$$

Proposition 17

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point a. Montrer que :

$$e^f \sim_a e^g \Longleftrightarrow \lim_a (f-g) = 0.$$

Donner un exemple où $f \sim g$ mais $e^f \not\sim e^g$.
Le fait que les équivalents se comportent mal en général vis à vis de la somme et de la composition est une des raisons qui motivent l'introduction des développements limités.

Développements limités
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $0 \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 si il existe P_n un polynôme de degré $\leq n$ tel que pour tout x au voisinage de 0

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x) + o(x^n).$$

Le reste peut aussi s'écrire (par définition) $x^n \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(t)$ est une fonction qui tend vers 0 quand t tend vers 0. Le polynôme P_n s'appelle la **partie régulière** *du D-L.*

Proposition 18

Si f admet un développement limité d'ordre n, il est unique.

Exercice 22. *Les fonctions suivantes ont-elles des développements limités en 0. Si oui à quel ordre*

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Proposition 19

Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

alors $f(0) = a_0$, f est dérivable en a et $f'(0) = a_1$.

Attention, l'existence d'un D-L d'ordre $n \geq 2$ n'assure pas l'existence de $f''(0)$. En effet, il existe des fonctions qui admettent un D-L à tous les ordres et qui ne sont pas nécessairement $\mathscr{C}^1$.

Exemple 1. *Soit f la fonction définie par*

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin(\frac{1}{x^2}) \ \text{ si } \ x \neq 0, \ f(0) = 1.$$

Vérifier que f admet un D.L. d'ordre 2 en 0 mais f n'est pas 2 fois dérivable en 0.

Exercice 23. *Montrer que la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin(e^{\frac{1}{x^2}})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet un D-L à tout ordre. Cette fonction est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?*

On définit de la même façon un DL de f en $a \in \mathrm{I}$ si pour tout x au voisinage de a

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x-a) + o((x-a)^n).$$

où P_n est un polynôme de degré n.

Proposition 20

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a alors f admet développement limité d'ordre n.

Cette proposition est une conséquence directe de la formule de Taylor-Young et la partie régulière du DL est précisément le polynôme de Taylor en a

$$\mathrm{P}_n(x-a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Proposition 21 – Intégration terme à terme

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ avec $(a \in \mathrm{I})$ une application dérivable telle qu'au voisinage de a

$$f'(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Alors f admet un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de a donné par

$$f(x) = f(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Proposition 22 – Dérivation terme à terme

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ avec $(a \in \mathrm{I})$ une application n fois dérivable en a. Si au voisinage de a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

alors f' admet le DL d'ordre $n-1$ au voisinage de a suivant

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}).$$

Si l'on ne suppose pas l'existence de $f^{(n)}(a)$ ou directement l'existence du développement limité d'ordre $n-1$ de f' le résultat est faux!

Proposition 23 – Somme, Produit, Quotient

Soient f et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ avec $(a \in \mathrm{I})$ deux applications admettant au voisinage de a un développement limité d'ordre n :

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x) + o((x-a)^n) \text{ et } g(x) = \mathrm{Q}_n(x) + o((x-a)^n).$$

où P_n et Q_n sont deux polynômes de degré $\leq n$. Alors :
- la somme $f+g$ admet un développement limité d'ordre n : $(f+g)(x) = \mathrm{P}_n(x) + \mathrm{Q}_n(x) + o((x-a)^n)$
- le produit fg admet un développement limité d'ordre n : $(fg)(x) = \mathrm{R}_n(x) + o((x-a)^n)$ où R_n est le reste de la division euclidienne de $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ par X^{n+1}.
- Si $g(0) = \mathrm{Q}(0) \neq 0$, le quotient f/g admet un développement limité d'ordre n : $f/g(x) = \mathrm{T}_n(x) + o((x-a)^n)$ où T_n est le quotient de la division suivant les puissances croissantes de P_n par Q_n à l'ordre n.

On rappelle ici les D-L "élémentaires" au voisinage de 0, des fonctions les plus usuelles et qui se retrouvent d'ailleurs très facilement à partir de ceux de e^t ou de $\frac{1}{1-t}$ (sauf celui de $\tan(t)$).

$e^t =$	$1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$
$\cos(t) =$	$1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1})$
$\sin(t) =$	$t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+2})$
$ch(t) =$	$1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1})$
$sh(t) =$	$t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+2})$
$\frac{1}{1-t} =$	$1 + t + t^2 + \ldots + t^n + o(t^n)$
$\frac{1}{1+t} =$	$1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^n t^n + o(t^n)$
$\ln(1+t) =$	$t - \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n + o(t^n)$
$-\ln(1-t) =$	$t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{1}{n} t^n + o(t^n)$
$\sqrt{1+t} =$	$1 + \frac{t}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{n!2^n} t^n + o(t^n)$
$(1+t)^\alpha =$	$1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + o(t^n)$
$arctan(t) =$	$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + o(t^{2n+2})$
$tan(t) =$	$t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + o(t^6)$

Enfin le lien entre DL et équivalent est donné par la proposition suivante :

Proposition 24

Si f admet un DL non nul (au voisinage de 0) alors f est équivalente en 0 au premier terme non nul du DL.

Exemple :

$$\frac{\sin(x)-x}{x^2} \sim_0 \frac{-x}{6}.$$

VI. Exercices Complémentaires

Exercice 24. *Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0)=f'(0)=f(1)=0$. Montrer qu'il existe un point $x\neq 0$, de la courbe représentative de f tel que la tangente à cette courbe en ce point passe par 0.*

Exercice 25. *Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim\limits_{x\to\infty} xf'(x)=1$. Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.*

Exercice 26. *Soit $f:]-a,a[\to\mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose qu'il existe $k\in]0,1[$ et $\mathrm{L}\in\mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(kx)}{x}=\mathrm{L}$. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer cette dérivée.*

Exercice 27. *a) Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction telle $f(0)=0$ et f dérivable en 0. Montrer que la suite de terme générale*

$$v_n=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{1}{n+k})$$

est convergente, calculer cette limite.
b) Application : Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{1}{n}+\arctan\frac{1}{n+1}+\ldots+\arctan\frac{1}{2n}\right)$$

Exercice 28. Règle de l'Hôpital. *Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(t)\neq 0$ pour tout $t\in]a,b[$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

On pourra appliquer les théorèmes généraux à la fonction

$$h(t)=f(t)-f(a)-\frac{g(t)-g(a)}{g(b)-g(a)}$$

En déduire la célèbre règle de l'Hôpital.
Application *En déduire que la fonction définie par*

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log(1+x)} & \text{pour } x \in]-1, +\infty[\\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0.

Exercice 29. Théorème de Darboux. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide et soit $a < b$ des éléments de I.*
On se propose de montrer que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.
On suppose que $f'(a) < f'(b)$ et considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. On considère la fonction $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - \lambda x$.
1) Justifier qu'il existe $c \in [a, b]$ tel $g(c) = \inf_{[a,b]} g(x)$.
2) Montrer que $c \neq a$ et $c \neq b$.
3) Conclure.

Exercice 30. *Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On considère également $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs. Montrer que $x \mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$, en déduire l'inégalité de Hölder :*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

Exercice 31. *a) Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1 + e^t)$ est convexe.*
b) En déduire que si $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des réels strictement positifs on a

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \ldots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \ldots (a_n + b_n)}.$$

Exercice 32. *Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\forall x, y \in \mathrm{I},\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est une fonction convexe.

Exercice 33. *Soit $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.*
1) Montrer l'existence de $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2) Montrer que si $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \mathrm{L} < 0$ alors f est décroissante.

Exercice 34. *Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ concave.*

1. *Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.*
2. *Montrer que : $\forall\ x, y \geq 0,\ f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.*

Exercice 35. *Calculer le développement limité des fonctions suivantes au voisinage de 0 et à l'ordre indiqué :*
1) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ à l'ordre 2
2) $e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2.
3) $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ à l'ordre 5.
4) $\ln(\frac{\sin x}{x})$ à l'ordre 4.
5) $(1 + x)^{\sin x}$ à l'ordre 4.
6) $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$ à l'ordre 2.

Exercice 36. *Calculer les limites suivantes :*

$$1)\lim_{x\to 1}\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\quad 2)\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\ln x}$$
$$3)\lim_{x\to 0}\frac{1}{xe^x(1+x)}-\frac{1}{x\cos x}\quad 4)\lim_{x\to +\infty}x^2(e^{1/x}-e^{1/(x-1)}).$$

Exercice 37. *Déterminer*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$$

suivant les valeurs de a et b $\in \mathbb{R}_*^+$.

Exercice 38. *Soit* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ *une fonction continue. Pour tout* $x>0$ *on pose* $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.
1) Déterminer la limite l de $\mathrm{F}(x)$ *quand* $x\to 0$.
2) On suppose f *dérivable à droite en* 0. *Montrer que* F *prolongée par continuité en 0 est dérivable.*

Exercice 39. *a) Rappeler pour quelle raison la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ *converge.*
b) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à $x\mapsto \ln(1+x)$ *calculer la somme de cette série.*

Exercice 40. *Soit* f *la fonction définie sur* $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *par* $f(x)=2\tan x-x$.
Montrer que f *admet une réciproque impaire de classe* C^∞.
Donner le développement limité de f^{-1} *à l'ordre* 6 *en 0.*

Exercice 41. *Etudier les branches infinies et la position du graphe par rapport aux asymptotes des fonctions suivantes :*
1) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-(x+\frac{1}{3})$
2) $g(x)=\dfrac{x\exp(x+\frac{1}{x})}{e^x-1}$.

Exercice 42. *On considère l'équation*

$$\tan x = x.$$

Donner un développement limité, en fonction de n, de la n−ième racine positive de cette équation.