Équations différentielles
Université Gustave Eiffel – Licence 3

Yannick VINCENT & Robert Eymard

2025

Table des matières

Introduction

EDO vs EDP

Les équations différentielles jouent un rôle fondamental dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou technologiques. Elles établissent une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées.

Une équation différentielle ordinaire (EDO) fait intervenir des dérivées par rapport à une seule variable (dans les modélisations, la variable est souvent le temps). Les EDO doivent être distinguées des EDP (équations aux dérivées partielles) qui contiennent des dérivées par rapport à plusieurs variables indépendantes et qui ne seront pas abordées dans le cadre de ce cours. Par exemple, l'équation de la chaleur, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$ est une EDP car elle lie la dérivée partielle de u par rapport au temps t à sa dérivée seconde par rapport à l'espace x. La distinction entre EDO et EDP va au-delà de la simple différence entre le nombre de variables : elle reflète également le cadre théorique dans lequel ces équations s'inscrivent. Les EDO se situent dans un cadre de dimension finie, où l'inconnue est une fonction d'une variable et les solutions appartiennent souvent à des espaces de fonctions simples, comme $\mathbb{R}^n$. À l'inverse, les EDP s'inscrivent dans le cadre d'espaces de Hilbert de dimension infinie. Sans rentrer dans les détails, la résolution de l'équation de la chaleur revient par exemple à résoudre $u'(t) = F(u(t))$ où $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & E \\ t & \longmapsto & x \mapsto u(t,x) \end{array} \right.$ (avec E un espace fonctionnel bien choisi sur lequel il est possible de définir la dérivée seconde et qui soit un espace de Hilbert) et F l'opérateur linéaire correspondant à la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x. E sera donc un espace de dimension infini et c'est en ce sens que les EDP sont de nature bien différente des EDO traitées dans ce cours.

On peut également remarquer que les espaces fonctionnels à considérer pour la résolution d'EDP (espaces de Lebsegue ou espaces de Sobolev) nécessitent d'utiliser la théorie de l'intégration de Lebesgue. À contrario, dans la théorie des EDO, toutes les fonctions à intégrer seront dérivables et l'intégrale de Riemann sera ainsi largement suffisante. Pour ainsi dire, la théorie des EDP utilise pleinement les avancées mathématiques du XX^e siècle tandis que, dans le cadre de notre cours, nous n'aurons besoin que de concepts des XVIII^e et XIX^e siècles.

Notations

Différentes notations et conventions sont possibles dans le cadre d'un cours sur les équations différentielles. Notre objectif étant de présenter un certain nombre de modélisations liées à la physique et

à la biologie, il nous a semblé naturel de noter la variable t, faisant référence à un temps, plutôt que x. Aussi, nous avons choisi de noter la fonction inconnue x plutôt que y ou f. Ce choix se justifie aisément si l'on pense cette grandeur comme étant la coordonnée d'un point sur un axe. À partir du second chapitre, on se placera d'ailleurs en dimension supérieure ou égale à deux et $x(t)$ apparaîtra alors comme étant l'abscisse de la trajectoire solution. De plus, la notation $x'(t)$ sera privilégiée par rapport à la notation utilisée en physique $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
Ainsi, cela signifie qu'une équation différentielle (en dimension 1) sera par exemple notée

$$x'(t) = t^3 x(t) + t,$$

là où d'autres ouvrages pourraient préférer, parmi d'autres possibles, les notations suivantes :

- $y'(t) = t^3 y(t) + t$
- $y'(x) = x^3 y(x) + x$
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t^3 y + t$
- $f'(t) = t^3 f(t) + t$
- $f'(x) = x^3 f(x) + x$
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = x^3 f(x) + x$

Enfin, il convient d'expliciter un autre choix relatif aux équations différentielles linéaires. Elles peuvent être présentées sous la forme $x'(t) = ax(t) + b$ ou sous la forme $x'(t) + ax(t) = b$. Bien entendu, il ne s'agit que d'une différence de forme, les deux étant équivalentes à un changement de signe près et l'on trouve les deux choix possibles dans la littérature. Celles et ceux qui préféreront la dernière comprendront aisément pourquoi l'on parle d'équation « sans second membre » lorsque $b = 0$. Cependant, les théorèmes plus avancés sur les équations différentielles (le théorème de Cauchy-Lipchitz notamment, présenté au chapitre 3), font souvent l'hypothèse que l'équation différentielle est mise sous une forme qui exprime directement la dérivée x' en fonction de x et de t. La forme choisie dans cet ouvrage pour les équations différentielles linéaires est ainsi cohérente avec l'ensemble de l'ouvrage.
Nous ne considérons par ailleurs dans ce cours que des équations différentielles ou des systèmes d'équations différentielles définis en tout point d'un unique intervalle réel, ce qui couvre un grand nombre de modèles issus du monde réel. Nous n'abordons pas les questions de raccord entre des solutions définies sur plusieurs intervalles disjoints.

Les grands théorèmes

Pour de nombreuses équations, il n'existe pas de solution qu'il serait calculable de manière exacte. Il est néanmoins possible d'étudier les équations différentielles en obtenant des informations qualitatives sur les solutions (existence, unicité, caractère bornée, convergence, périodicité, *etc.*). Nous donnons une liste (bien sûr non exhaustive) de théorèmes importants concernant l'étude qualitative équations différentielles. Notre cours se concentrera principalement sur le théorème de Cauchy-Lipschitz et le théorème des bouts et les autres sont donnés à titre culturels. De ce fait, il ne s'agit pas d'énoncer précisément ces résultats mais plutôt de donner une idée du cadre dans lequel se situe la théorie que nous étudions.

Théorème de Cauchy-Lipschitz et théorème des bouts

On s'intéresse à une équation de la forme $x'(t) = F(t, x(t))$ avec F suffisamment régulière (par exemple F de classe $\mathscr{C}^1$. Si l'on se donne un temps t_0 et une valeur x_0, il existe une unique solution locale de l'équation telle que $x(t_0) = x_0$. En général, cette solution n'est cependant définie que localement. Il faut alors ajouter d'autres hypothèses (par exemple la linéarité de F) pour assurer l'existence d'une solution globale (existant pour tout temps t).

Le théorème des bouts permet parfois également d'assurer l'existence d'une solution globale. Selon ce théorème, une solution qui n'est pas globale doit nécessairement être non bornée aux bornes de son ensemble de définition. Parfois, il est possible d'apporter un argument permettant d'assurer le caractère borné des solutions (cela peut se déduire par exemple des propriétés de F). Dans ce cas, on sera alors assuré du fait que la solution locale donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz est en fait globale.

Théorème du flot

On considère l'équation $x'(t) = F(x(t))$. Comme F ne dépend pas explicitement du temps, on dit que F est une équation autonome. Dans ce cas, on définit le flot de l'équation $\phi_t(a)$ qui est la valeur au temps t de l'unique solution telle que $x(0) = a$. Par définition, on a donc, pour tout a, $\phi_0(a) = a$.

Le théorème du flot indique que, lorsque F est suffisamment régulière (de classe $\mathscr{C}^2$ par exemple) le flot est de classe $\mathscr{C}^1$. Cela signifie que, si les conditions initiales subissent une petite variation, la solution subira également une petite variation (avec une régularité $\mathscr{C}^1$). Un corollaire du théorème du flot est le suivant : si une équation dépend d'un paramètre et est de la forme $x'(t) = F_\alpha(x(t))$ (α est le paramètre), les solutions sont également continues (ou même $\mathscr{C}^1$) par rapport au paramètre.

Théorème de Hartman-Grobman

Dans le cadre d'une équation différentielle autonome $x'(t) = F(x(t))$, on considère les points d'annulation de F. Ces points s'appelle points d'équilibre car, en ces points, la dérivée est nulle et il existe donc une solution constante dont la valeur est égale au point d'équilibre.

D'après le théorème de Hartman-Grobman, le comportement des solutions au voisinage d'un point d'équilibre a est le même que celui des solution de l'équation $x'(t) = DF_a(x(t))$. Il est plus précisément le même à homéomorphisme près. L'intérêt réside bien sûr dans le fait que cette équation est linéaire et cela permet donc de ramener l'étude du comportement d'une équation différentielle autonome à l'étude d'une équation différentielle linéaire.

Théorème de Poincaré-Bendixson

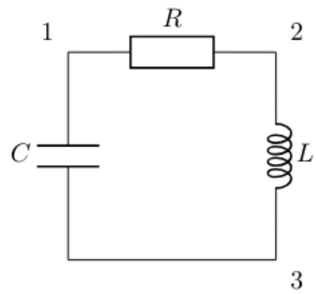
En dimension deux (c'est à dire si les solutions sont à chercher parmi les fonctions $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$), si la solution d'une équation autonome est bornée, alors il peut se produire essentiellement deux choses : soit la solution converge vers un point d'équilibre, soit elle se rapproche asymptotiquement d'une solution périodique. Autrement dit, les solutions d'une équation différentielle ne peuvent pas avoir un comportement chaotique en dimension deux. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Poincaré-Bendixson. En dimension supérieure, ce résultat n'est en revanche plus vraie, comme le montre l'exemple de l'attracteur de Van der Pol en dimension trois.

Les modèles

Un des objectifs du cours est de comprendre comment s'applique les théorèmes du cours (en particulier le théorème de Cauchy-Lipschitz et le théorème des bouts) dans le cadre de modèles tirés de la biologie ou de la physique. Le premier modèle que nous présentons, lié à la physique, est simple en cela qu'il s'agit d'un système différentiel linéaire.

Modèle RLC

Le modèle RLC représente un circuit électrique composé de trois éléments en série : une résistance dont la valeur, mesurée en ohms (Ω) est notée R, une inductance dont la valeur, mesurée en henrys (H), est notée L, et un condensateur, dont la capacité, mesurée en farads (F), est notée C. Ce modèle est couramment utilisé pour analyser le comportement des circuits électriques. Nous considérons l'exemple dans lequel le condensateur porte une charge initiale Q_0, exprimée en coulombs (C), et le circuit est fermé au temps $t = 0$. L'enjeu du modèle est de donner des équations permettant de calculer l'intensité du courant $I(t)$, exprimée en ampères (A) pour un temps t, exprimé en secondes (s), appartenant à l'intervalle d'étude $[0, +\infty[$. Chacun des trois éléments (résistance, inductance, condensateur) constitue un dipôle pour lequel la physique propose une loi de comportement, reliant les fonctions $I(t)$ et la tension aux bornes du dipôle. On définit les points 1, 2 et 3 comme sur le circuit ci-dessous.



Comme les éléments sont en série, l'intensité du courant $I(t)$ est identique dans tous les points du circuit.
La loi d'Ohm décrit la relation entre la tension $V_2(t) - V_1(t)$ aux bornes de la résistance située entre les points 1 et 2 et l'intensité du courant $I(t)$:

$$V_2(t) - V_1(t) = RI(t). \tag{1}$$

La tension $V_3(t) - V_2(t)$ aux bornes de l'inductance située entre les points 2 et 3 est donnée par la formule :

$$V_3(t) - V_2(t) = LI'(t). \tag{2}$$

La relation entre la tension $V_1(t) - V_3(t)$ aux bornes du condensateur et sa charge $Q(t)$ est donnée par :

$$V_1(t) - V_3(t) = \frac{1}{C}Q(t). \tag{3}$$

Enfin, la variation de la charge du condensateur est liée à l'intensité du courant par la relation $I(t) = Q'(t)$. Les deux équations du modèle RLC sont alors données par les relations $V_2(t) - V_1(t) + V_3(t) - V_2(t) + V_1(t) - V_3(t) = 0$ et $I(t) = Q'(t)$, ce qui aboutit au système d'équations, dont les inconnues sont les fonctions du temps I et Q suivant :

$$\begin{cases} I'(t) = -\frac{1}{L}(RI(t) + \frac{1}{C}Q(t)) \\ Q'(t) = I(t) \end{cases} \tag{4}$$

Ces équations sont considérées avec la condition initiale suivante : pour $t = 0$, le condensateur porte la charge $Q(0) = Q_0$, et l'intensité qui traverse le circuit est nulle, donc $I(0) = 0$.

Ce modèle est donc sous la forme $X'(t) = AX(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ avec $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix}$, en posant $X(t) = \begin{pmatrix} I(t) \\ Q(t) \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1, de côté 2. Nous verrons dans ce cours comment résoudre ce problème à partir de l'étude des propriétés spectrales de la matrice A.
Notons que ce système est exprimé aussi bien au moyen d'une unique équation différentielle, dite du second ordre, dont l'unique inconnue est la fonction Q :

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = 0, \tag{5}$$

avec les conditions initiales $Q(0) = Q_0$ et $Q'(0) = 0$. Nous voyons ainsi que le même problème peut être exprimée sous deux formes différentes, et nous verrons dans le cours que ces formes sont équivalentes.

Pendule pesant

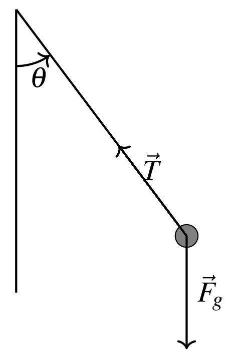
Le pendule pesant est un système mécanique classique qui illustre des principes fondamentaux de la mécanique newtonienne. On considère une masse ponctuelle m attachée à une tige ou un fil inextensible de longueur L, suspendue dans un champ gravitationnel uniforme $\vec{g}$. En négligeant les frottements et les forces dissipatives, l'équation décrivant la dynamique du pendule peut être obtenue à partir de la seconde loi de Newton.
La seconde loi de Newton s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{6}$$

où $\vec{F}$ est la somme des forces appliquées sur la masse, et $\vec{a}$ est l'accélération.
Dans le cas du pendule pesant, deux forces principales sur la masse :

- La force gravitationnelle $\vec{F}_g = m\vec{g}$, dirigée verticalement vers le bas.
- La tension du fil $\vec{T}$, qui agit le long de la direction du fil et ne contribue pas directement au mouvement angulaire.

Pour décrire le mouvement angulaire du pendule, on choisit un repère polaire avec l'angle θ mesurant la déviation par rapport à la verticale.



La position de la masse est donnée par :

$$\vec{r} = L\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En projetant les forces sur la direction tangentielle au mouvement circulaire, seule la composante tangentielle à la force gravitationnelle contribue. Cette composante est donnée par :

$$F_{\text{tangente}} = -mg\sin\theta.$$

Selon la seconde loi de Newton appliquée à la direction tangentielle, on a :

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta.$$

En simplifiant par la masse m, on obtient l'équation du pendule pesant non amorti :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

Cette équation est une équation différentielle non linéaire qui décrit le mouvement oscillatoire du pendule et l'on montrera qu'elle admet une solution globale. Pour des petites oscillations, l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ peut être utilisée, menant à une solution harmonique simple. En effet, l'équation devient alors

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

En posant $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, les solutions sont de la forme $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ (où A et φ sont des constantes dépendant des conditions initiales). En ajoutant les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$, on obtient :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t).$$

Une question est néanmoins souvent passée sous silence : la solution obtenue en faisant l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ est-elle proche de la solution exacte ? Et si oui, dans quel sens ? Cela est d'autant plus important que, pour des amplitudes plus grandes, le caractère non linéaire de l'équation doit être pris en compte.

Dynamique des populations

Les modèles de croissance des populations sont des outils mathématiques utilisés pour décrire l'évolution de la taille d'une population au fil du temps. Ils sont utilisés dans divers domaines tels que l'écologie, la démographie, et l'économie. Ces modèles prennent en compte les contraintes environnementales et les limites de ressources pour modéliser une croissance qui ralentit et se stabilise au fil du temps.

Modèle de Verhulst

Le modèle de dynamique des populations le plus simple (appelé modèle logistique ou encore modèle de Verhulst) est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \tag{7}$$

où $N(t)$ représente la taille de la population à un moment donné, r est le taux de croissance intrinsèque, et K est la capacité de charge de l'environnement. Il s'agit d'une équation différentielle scalaire non-linéaire autonome (sous la forme $x'(t) = F(x(t))$, où la fonction F ne dépend pas directement du temps) d'ordre 1.
L'équation (7) peut être résolue par méthode de séparation des variables. On écrit

$$\int_0^t \frac{KN'(s)}{rN(s)\,(K - N(s))}\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{d}s = t.$$

Par décomposition en éléments simples, on obtient

$$\int_0^t \left(\frac{N'(s)}{N(s)} + \frac{N'(s)}{K - N(s)}\right)\mathrm{d}s = \ln\frac{N(t)}{N_0} - \ln\frac{K - N(t)}{K - N_0} = rt,$$

où N_0 est la taille initiale de la population. On obtient

$$N(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - N_0}{N_0}e^{-rt}}. \tag{8}$$

Modèle proie-prédateur de Lotka Volterra

On peut complexifier un peu le modèle précédent. Les équations de prédation de Lotka-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de « modèle proie-prédateur », décrivent la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent. Elles ont été proposées indépendamment par Alfred James Lotka en 19251 et Vito Volterra en 19262. Initialement , ce système d'équations a été utilisé comme modèle pour la dynamique du lynx et du lièvre des neiges, pour laquelle de nombreuses données de terrain ont été collectées sur les populations des deux espèces par la Compagnie de la baie d'Hudson au XIX^{e} siècle.

Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = y(t)\,(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

où $x(t)$ est le nombre de proies au temps t et $y(t)$ le nombre de prédateurs au temps t. Les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ caractérisent les interactions entre les deux espèces :

- α est taux de reproduction intrinsèque des proies (en absence de prédateurs) ; β est le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés ;
- γ est le taux de mortalité intrinsèque des prédateurs (en absence de proie) ;
- δ est le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées.

Dans ce modèle, les proies sont supposées avoir une source illimitée de nourriture et se reproduisent donc exponentiellement en absence de prédateur (si $\beta = 0$). De plus, les termes de prédation $-\beta x(t)y(t)$ et $\delta x(t)y(t)$ sont proportionnels à $x(t)y(t)$ et donc à la probabilité de rencontre entre une proie et un prédateur.

Ce système d'équations est clairement non linéaire en raison des termes de prédation et il n'est pas possible de calculer l'expression des solutions en fonction du temps à l'aide de fonctions usuelles. Il est toutefois possible de montrer que les solutions sont périodiques et cela constitue un résultat typique que nous chercherons à démontrer dans le cadre d'une étude qualitative.

Modèle de compétition de Lotka Volterra

Le modèle « proie-prédateur » ne doit pas être confondu avec un autre modèle associé aux noms de Lotka et de Volterra : le modèle de compétition. Il s'agit là de modéliser l'évolution des populations de deux espèces se partageant une même ressource. Les équations sont alors les suivantes : Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} x_1'(t) = r_1 x_1(t) \left(1 - \dfrac{x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)}{K_1}\right) \\ x_2'(t) = r_2 x_2(t) \left(1 - \dfrac{x_1(t) + \alpha_1 x_1(t)}{K_2}\right) \end{cases}$$

où $x_i(t)$ est le nombre de d'individus de l'espèce i au temps t. Les coefficients r_i et K_i correspondent comme dans le cas du modèle de Verhulst, aux taux de croissance intrinsèque et aux capacités de charges respectives des deux espèces. De plus, le coefficient α_1 correspond à l'effet de l'espèce 1 sur l'espèce 2 et inversement, le coefficient α_2 correspond à l'effet de l'espèce 2 sur l'espèce 1.

Selon les valeurs des paramètres, l'une des deux espèces va disparaître ou il y aura, dans certains cas, coexistence des deux espèces. Les effectifs des deux populations vont alors converger vers des effectifs limites (correspondant à des points d'équilibres). Là aussi, cet exemple de convergence est typique des résultats qu'une étude qualitative permet d'établir.

Modèle SIR en épidémiologie

Ce modèle est très utilisé en épidémiologie et il permet par exemple de modéliser l'impact d'un confinement d'une population sur la propagation d'une épidémie. On considère une population de taille N (constante) et on note :

- $S(t)$ est le nombre de personnes susceptibles d'être infectées à l'instant t (on parle en général de « personnes susceptibles »).
- $I(t)$ est le nombre de personnes infectées.
- $R(t)$ est le nombre de personnes retirées de la transmission par suite d'un confinement, d'une guérison ou d'un décès.

On a $N = S(t) + I(t) + R(t)$ et on suppose que N est suffisamment grand pour que le phénomène soit modélisé par un système différentiel (on oublie pour ainsi dire le fait que N doit être un entier et on peut considérer les fonctions S, I et R comme étant des fonctions dérivables à valeurs réelles). La population est ainsi divisée en trois compartiments.

$$\boxed{\mathrm{S}} \longrightarrow \boxed{\mathrm{I}} \longrightarrow \boxed{\mathrm{R}}$$

On considère qu'il n'est pas possible de passer du compartiment R au compartiment S. Autrement dit, une personne ne peut pas être infectée plusieurs fois.
On note $a > 0$ le **taux de contact effectif**. C'est le produit du nombre de contacts moyen qu'une personne a par unité de temps et la probabilité de transmission lors d'un contact entre une personne infectée et un personne susceptible.
Lorsqu'une personne susceptible rencontre une personne, la probabilité que cette personne soit infectée est $\frac{I}{N}$. Ainsi, par unité de temps, une personne susceptible sera infectée avec une probabilité de $a \times \frac{I}{N}$ et le nombre de nouvelle infection en un petit temps dt sera donc $a \times \frac{I}{N} S\mathrm{d}t$.
Par ailleurs, on suppose que le temps passé dans le compartiment I est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de **paramètre b>0**. Par conséquent, le temps moyen resté dans le compartiment I est $\frac{1}{b}$ et chaque personne infectée a donc une probabilité $b\mathrm{d}t$ de passer dans le compartiment R. Au final, on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -aS\dfrac{I}{N} \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = aS\dfrac{I}{N} - bI \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = bI \end{cases}$$

On ajoute enfin les conditions initiales suivantes :

$$S(0) = N - I_0, \qquad I(0) = I_0, \qquad R(0) = 0.$$

Une étude qualitative permet alors de montrer que ce système admet une unique solution définie pour tout temps $t \geqslant 0$ et de déterminer la taille finale des différents compartiments (on peut par exemple se poser la question de savoir si toute la population aura été infectée), le moment du pic épidémique, la taille du pic épidémique, *etc.*. Nous verrons de plus que ce modèle présente la particularité d'admettre une infinité de points d'équilibre.

Chapitre 1

Équations différentielles scalaires linéaires

Définition 1.1 – Intervalle

Dans le cadre de ce livre, un intervalle de $\mathbb{R}$ désigne un ensemble ayant l'un des neuf types suivants (où $A, B \in \mathbb{R}$ et $A < B$) :

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty\,;+\infty[&]-\infty\,;A[&]-\infty\,;A] &]A\,;+\infty[& \\ [A\,;+\infty[&]A\,;B[& [A\,;B[&]A\,;B] & [A\,;B] \end{array}$$

En particulier un singleton n'est pas un intervalle.

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Il s'agit de chercher l'ensemble des fonctions x définies et dérivables sur un intervalle I telles que pour tout $t \in I$, $x'(x) = ax(t) + b(t)$ (où $a \in \mathbb{R}$ et b est une fonction continue sur I). On commencera par traiter le cas plus simple où b est la fonction nulle.

1. Résolution de $x'(t) = ax(t)$

Proposition 1.1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit x une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction x satisfait,

$$\text{pour tout } t \in I,\ x'(t) = ax(t) \tag{1.1}$$

si, et seulement si, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $x(t) = Ce^{at}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& \forall t \in I,\ x'(t) = ax(t) \\
\iff\ & \forall t \in I,\ x'(t) - ax(t) = 0 \\
\iff\ & \forall t \in I,\ e^{-at}\big(x'(t) - ax(t)\big) = 0 \quad (\text{car } \forall t \in I,\ e^{-at} \neq 0) \\
\iff\ & \forall t \in I,\ e^{-at}x'(t) - ae^{-at}x(t) = 0 \\
\iff\ & \forall t \in I,\ \big(e^{-at}x(t)\big)' = 0 \\
\iff\ & \text{La fonction } t \longmapsto e^{-at}x(t) \text{ est constante sur } I \quad (\text{car } I \text{ est un intervalle}) \\
\iff\ & \exists C \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall t \in I,\ x(t) = Ce^{at}.
\end{aligned}$$

□

On dit que l'équation différentielle (1.1) est linéaire, à coefficient constant et **homogène** (on dit aussi « sans second membre »). La propriété d'une telle équation réside dans le fait que l'ensemble de ses solutions est stable par combinaisons linéaires : si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation $x'(t) = ax(t)$, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ est également une solution [1]. En effet, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)'(t) &= \lambda x_1'(t) + \lambda_2 x_2'(t) \\
&= \lambda_1 (ax_1(t)) + \lambda_2 (ax_2(t)) \qquad (\text{car } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont solutions}) \\
&= a\lambda_1 x_1(t) + a\lambda_2 x_2(t) \\
&= a(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)),
\end{aligned}$$

ce qui signifie exactement que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ est solution de l'équation différentielle $x'(t) = ax(t)$.

2. Résolution de $x'(t) = ax(t) + b(t)$

Nous considérons maintenant le problème non homogène (ou "avec second membre"), de la forme $x'(t) = ax(t) + b(t)$ pour $t \in I$, pour une fonction continue b pouvant ne pas être identiquement nulle. Contrairement au problème (1.1), la propriété de stabilité des solutions par combinaison linéaire n'est plus vérifiée dès qu'il existe $t \in I$ tel que $b(t) \neq 0$. *Stricto sensu*, seules les équations homogènes peuvent donc être qualifiées de linéaires. Par abus de langage, les équations de la forme $x'(t) = ax(t) + b(t)$ seront tout de même qualifiées de **linéaires** [2]. On va d'ailleurs voir que leur résolution se ramène à la résolution d'équations homogènes.

Proposition 1.2

Soient $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et b une fonction continue sur I. Soit x une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction x satisfait,

$$\text{pour tout } t \in I,\ x'(t) = ax(t) + b(t) \tag{1.2}$$

si, et seulement si, il existe $C \in \mathbb{R}$ et une solution f_0 de (1.2) (dite "solution particulière") tels que pour tout $t \in I$, $x(t) = f_0(t) + Ce^{at}$.

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit f_0 une solution de (1.2) (cela signifie que $f_0' = af_0 + b$).

1. Autrement dit, l'ensemble des solutions de $x'(t) = ax(t)$ est un espace vectoriel de dimension 1, engendré par la fonction $t \mapsto e^{at}$.

2. Le terme correct serait plutôt affine.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
x \text{ est une solution de (1.2)} &\iff x' = ax + b \\
&\iff x' - ax = f_0' - af_0 \\
&\iff x' - ax = b \\
&\iff x' - f_0' - ax + af_0 = 0 \\
&\iff (x - f_0)' - a(x - f_0) = 0 \\
&\iff (x - f_0) \quad \text{est solution de } x' = ax \\
&\iff \forall t \in I,\ (x - f_0)(t) = Ce^{at} \quad (\text{avec } C \in \mathbb{R}) \\
&\iff \forall t \in I,\ x(t) - f_0(t) = Ce^{at} \quad (\text{avec } C \in \mathbb{R}) \\
&\iff \forall t \in I,\ x(t) = f_0(t) + Ce^{at} \quad (\text{avec } C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

□

Remarque. *Il est généralement bien connu des lycéens que les solutions d'une équation différentielle de la forme $x' + ax = b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ des constantes réelles) sont les fonctions de la forme $x(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$. Il s'agit simplement d'un cas particulier de la proposition 1.2. En effet, la solution particulière de l'équation différentielle est, dans ce cas, la fonction constante $f_0(t) = -\frac{b}{a}$.*

D'après la proposition 1.2, pour résoudre une équation différentielle de la forme $x'(t) + ax(t) = b(t)$, il suffit de déterminer une solution particulière f_0 pour en déduire l'ensemble des solutions. En général, la recherche d'une solution particulière se fait néanmoins à l'aide d'une méthode que l'on justifiera plus loin. Cette méthode est appelée **méthode de la variation de la constante** et consiste à chercher une solution de la forme $f_0(t) = C(t)e^{at}$. Elle tire son nom du fait que, par rapport à l'équation homogène $x'(t) = ax(t)$ dont les solutions sont de la forme $t \longmapsto Ce^{at}$, on cherche ici une solution où l'on a remplacé la constante C par une fonction.

Méthode – Résolution de $x'(t) = ax(t) + b(t)$

- On résout $x'(t) = ax(t)$ (appelée équation homogène E_H)
- On cherche une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante : une solution sous la forme $C(t)e^{at}$.
- On en déduit l'ensemble des solutions de $x'(t) = ax(t) + b(t)$ à l'aide de la proposition 1.2

Exemple. Résoudre $x'(t) = -3x(t) + t$ sur $\mathbb{R}$.

Solution :

- On résout $x'(t) = -3x(t)$ (EH).
  Les solutions de (EH) sont les fonctions
  $$x(t) = Ce^{-3t} \qquad (C \in \mathbb{R}).$$
- On cherche une solution particulière de la forme $x(t) = C(t)e^{-3t}$.
  On a $x'(t) = (C'(t) - 3C(t))\, e^{-3t}$
  Ainsi,

$$\begin{aligned}
x'(t) = -3x(t) + t &\iff \big(C'(t) - 3C(t)\big)\, e^{-3t} = -3C(t)e^{-3t} + t && (1.3) \\
&\iff C'(t) = te^{3t} && (1.4)
\end{aligned}$$

Une intégration par partie permet d'obtenir $C(t) = \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\right) e^{3t}$.
Au final, une solution particulière est donnée par

$$f_0(t) = C(t)e^{-3t} = \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$$

- L'ensemble des solutions de (1.2) est donc :

$$\mathscr{S}_E = \left\{ t \longmapsto Ce^{-3t} + \frac{t}{3} - \frac{1}{9},\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque. *C'est la simplification observée à la ligne 1.4 qui a permis de déterminer $C(t)$. On a en effet obtenu une équation différentielle qui ne faisait plus apparaître simultanément $C'(t)$ et $C(t)$ mais uniquement le terme $C'(t)$. Autrement dit, on s'est ramené à trouver une primitive de la fonction $t \longmapsto te^{3t}$. Cette simplification constitue le cœur de la méthode « de la variation de la constante » et se produira toujours. Dans le cas où le terme en $C(t)$ ne se simplifierait pas, cela signifie d'ailleurs qu'une erreur de calcul a sans doute été commise.*

3. Détermination pratique de solutions particulières

La méthode de la variation de la constante est générale et fonctionne à tous les coups. Dans le cas de l'équation $x'(t) = -3x(t) + t$, il n'était cependant pas indispensable de l'utiliser. En effet, le second membre (la fonction définie par $b(t) = t)$) étant polynomial, il est naturel de chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale. De manière générale, dans le cas d'une équation de la forme $x'(t) = ax(t) + b(t)$ (avec a une constante réelle) et lorsque b est une fonction « classique », il n'est pas toujours nécessaire d'appliquer la méthode de variation des constantes.

- Si $b(t)$ est une fonction polynomiale, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré que b.
- Si $b(t)$ est une fonction trigonométrique (en $\cos(\alpha t)$ ou $\sin(\alpha t)$), on cherche une solution particulière sous la forme $x(t) = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$.
- Si $b(t)$ est de la forme $b(t) = P(t)e^{\alpha t}$ (ce qui inclus le cas où P est constant), on cherche une solution particulière de la forme $x(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme. En général, on cherche Q de même degré que P, sauf dans le cas où $\alpha = a$ (le coefficient de l'équation différentiel) où l'on cherche alors Q de degré $\deg(P) + 1$.

Ce genre d'astuces seront utiles dans les exercices de fin de chapitre.

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients fonctions continues

On souhaite résoudre $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I. Cela signifie que l'on cherche l'ensemble des fonctions x définies et dérivables sur I telles que pour tout $t \in I$, $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$.

Comme dans le cas constant, on commence par traiter le cas où b est la fonction nulle.

1. Résolution de $x'(t) = a(t)x(t)$

Proposition 1.3

Soit A une primitive de la fonction a (elle existe car a est continue). Alors l'ensemble des solutions de $x'(t) = a(t)x(t)$ est donnée par :

$$\left\{ t \longmapsto Ce^{A(t)} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration. On reprend la démonstration de la proposition 1.2 en remplaçant a par $a(t)$ et donc at par $A(t)$. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
& \forall t \in I,\ x'(t) = a(t)x(t) \\
\iff\ & \forall t \in I,\ x'(t) - a(t)x(t) = 0 \\
\iff\ & \forall t \in I,\ e^{-A(t)}\left(x'(t) - a(t)x(t)\right) = 0 \quad (\text{car } \forall t \in I,\ e^{-A(t)} \neq 0) \\
\iff\ & \forall t \in I,\ e^{-A(t)}x'(t) - a(t)e^{-A(t)}x(t) = 0 \\
\iff\ & \forall t \in I,\ \left(e^{-A(t)}x(t)\right)' = 0 \\
\iff\ & \text{La fonction } t \longmapsto e^{-A(t)}x(t) \text{ est constante sur } I \quad (\text{car } I \text{ est un intervalle}) \\
\iff\ & \exists C \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall t \in I,\ x(t) = Ce^{A(t)}.
\end{aligned}$$

□

Exemple. Résoudre $x'(t) = tx(t)$.

Solution :
Les solutions sont les fonctions de la forme $x(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}}$ (où $C \in \mathbb{R}$).

2. Résolution de $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$

Proposition 1.4

Soient a et b des fonctions continues sur un intervalle I. On considère l'équation (1.2) : $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$. On suppose qu'il existe une solution f_0 de l'équation (1.2). Alors l'ensemble des solutions de l'équation (1.2) est :

$$\left\{ t \longmapsto f_0(t) + Ce^{A(t)} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Démonstration. La preuve est laissée au lecteur. Elle est en tout point similaire à celle de la proposition 1.2. □

En pratique, on utilise là aussi une méthode de variation de la constante en commençant par résoudre l'équation homogène associée à l'équation différentielle (1.2) à résoudre.

Méthode – Résolution de $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$

- On résout l'équation homogène (E_H) : $x'(t) = a(t)x(t)$.
- On cherche une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante : une solution sous la forme $C(t)e^{A(t)}$.
- On en déduit l'ensemble des solutions de $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ à l'aide de la proposition 1.4

Exemple. Résoudre $x'(t) = tx(t) + e^{\frac{t^2}{2}}$ sur $]0;+\infty[$.

Solution :

- Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}}$ (avec $C \in \mathbb{R}$).
- On cherche une solution particulière de (1.2) de la forme $x(t) = C(t)e^{\frac{t^2}{2}}$ On a $x'(t) = (C'(t)+t)e^{\frac{t^2}{2}}$ Ainsi, on obtient que C vérifie $C'(t) = 1$ et $C(t) = t$ convient (on rappelle qu'il suffit de trouver une solution).
  Au final, une solution particulière de (1.2) est la fonction
  $$f_0(t) = te^{\frac{t^2}{2}}$$
- L'ensemble des solutions de (1.2) est donc :
  $$\mathscr{S}_E = \left\{t \longmapsto Ce^{\frac{t^2}{2}} + te^{-\frac{t^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

3 Problème de Cauchy

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. On appelle **problème de Cauchy** le problème consistant à chercher une fonction $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \star \quad x \text{ est dérivable sur } I \\ \star \quad \forall t \in I,\ x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ \star \quad x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Proposition 1.5 – Formule de Duhamel

Le problème de Cauchy (1.5) admet l'unique solution suivante :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)} b(s)ds \tag{1.6}$$

où $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)ds$ est la primitive de a s'annulant en t_0.

Démonstration. On procède par analyse-synthèse.

- Analyse : Soit $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution du problème. Pour tout $t \in I$, $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$.
  En multipliant par $e^{-A(t)}$ (où A est définie comme la primitive de a s'annulant en t_0), on obtient : $e^{-A(t)}x'(t) - a(t)e^{-A(t)}x(t) = e^{-A(t)}b(t)$.
  On pose $y(t) = e^{-A(t)}x(t) \quad (\forall t \in I)$.
  L'équation différentielle est donc équivalente à $y'(t) = e^{-A(t)}b(t)$.
  En intégrant, on obtient : $\int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds$
  Par conséquent, $y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)ds$
  et finalement $\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)}b(s)ds$.
- Synthèse : on vérifie que la fonction définie par $x(t) = x_0 e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)}b(s)ds$ est bien solution du problème de Cauchy (1.5).
  Il est immédiat de voir que x étant ainsi définie, on a bien $x(t_0) = x_0$. De plus, pour montrer que $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ pour tout $t \in I$, il convient de se rappeler qu'une fonction de la forme $t \longmapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(t)dt$ est dérivable et admet pour dérivée f. On utilise alors la formule de dérivation des fonctions composées afin d'établir le résultat. Le détail du calcul est laissé au lecteur.

□

Remarque.

- *Dans la formule de Duhamel, le terme* $x_0e^{A(t)}$ *correspond à la solution du problème homogène* $x'(t) = a(t)x(t)$ *telle que* $x(t_0) = x_0$.
- *Dans la formule de Duhamel, le terme* $\int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)}b(s)ds$ *correspond à la solution de l'équation différentielle* $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ *telle que* $x(t_0) = 0$. *Dans le cas où* $x_0 \neq 0$, *il ne s'agit en revanche pas d'une solution du problème de Cauchy* (1.5).
- *Attention, même lorsque* $x_0 = 0$, *le terme* $\int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)}b(s)ds$ *la solution particulière trouvée avec la méthode de la variation de la constante ne correspondra pas nécessairement au second terme de la formule de Duhamel (voir l'exemple suivant).*
- *En observant la formule de Duhamel* (1.6)*, on se rend compte que le second terme peut mettre mis sous la forme*

$$\left(\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds\right)e^{A(t)}$$

(car $e^{A(t)}$ *ne dépend pas de s et peut donc être sorti de l'intégrale par linéarité). On retrouve ici le fait qu'une solution particulière de l'équation* $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ *s'obtient en multipliant* $e^{A(t)}$ *(l'expression de la solution de l'équation homogène) par une certaine fonction. Cela vient donc justifier la méthode de la variation de la constante exposée précédemment. De ce fait, l'application de la formule de Duhamel ou de la méthode de la variation de la constante nécessite un nombre de calculs sensiblement identiques et de même difficultés.*

Exemple. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{t}x(t) + t^2 & \forall t \in]0\,;+\infty[\\ x(1) = 2 \end{cases}$$

Solution 1 (avec la méthode de la variation de la constante) :

- Les solutions de l'équation homogène $x'(t) = \frac{1}{t}x(t)$ sont de la forme $t \longmapsto Ce^{\ln(t)} = Ct$.
- On cherche alors une solution particulière de la forme $x(t) = C(t)t$.
  On a $x'(t) = C'(t)t + C(t)$.
  Ainsi,

$$\begin{aligned} & \forall t > 0, \quad x'(t) = \frac{1}{t}x(t) + t^2 \\ \Longleftrightarrow\ & \forall t > 0, \quad C'(t)t + C(t) = \frac{1}{t}C(t)t + t^2 \\ \Longleftrightarrow\ & \forall t > 0, \quad C'(t) = t \\ \Longleftrightarrow\ & \forall t > 0, \quad C(t) = \frac{t^2}{2} + k \quad (k \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

  Une solution particulière est donc donnée par $x(t) = \frac{t^3}{2}$ (en prenant par exemple $k = 0$).
- Les solutions de l'équation $x'(t) = \frac{1}{t}x(t) + t^2$ sont de la forme $x(t) = Ct + \frac{t^3}{2}$ (avec $C \in \mathbb{R}$).
- Il suffit donc de déterminer la valeur de C pour laquelle $x(1) = 0$ (la proposition 1.5 assure qu'il en existe une unique). En posant $t = 1$ dans l'expression de $x(t)$, on obtient $2 = C + \frac{1}{2}$ et

donc $C = \frac{3}{2}$.

En définitive, la solution du problème de Cauchy cherché est la fonction $t \longmapsto \frac{3t+t^3}{2}$.

Solution 2 (avec la formule de Duhamel) :
On a $a(t) = \frac{1}{t}$ (donc $A(t) = \int_1^t \frac{1}{s} ds = \ln(t)$) et $b(t) = t^2$.
D'après la formule de Duhamel, la solution du problème de Cauchy est la fonction définie par

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 e^{A(t)} + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(s)} b(s) ds \\
&= 2e^{\ln(t)} + \int_1^t e^{\ln(t)-\ln(s)} s^2 ds \\
&= 2t + \int_1^t \frac{t}{s} s^2 ds \\
&= 2t + t \int_1^t s ds \\
&= 2t + t \left[\frac{s^2}{2} \right]_1^t ds \\
&= \frac{3t+t^3}{2}
\end{aligned}$$

et l'on retrouve bien la même expression que précédemment.

Remarque. *Attention ! Une erreur classique lorsque l'on résout un problème de Cauchy est de déterminer la constante C à partir de l'expression des solutions de l'équation homogène. Cela n'a pas de sens étant donné que ces fonctions ne sont pas solutions de l'équation différentielle $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$. Il faut donc bien veiller à déterminer la constante C à la fin, à partir de l'expression totale des solutions.*

4 Équations différentielles linéaires homogène d'ordre deux à coefficients constants

Le cas des équations différentielles scalaires d'ordre 2 peut facilement se ramener à un système différentiel d'ordre 1 et sera l'objet du chapitre suivant. Le résultat de cette partie est néanmoins très classique et mérite d'être connu.

Proposition 1.6

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. On considère l'équation différentielle (sur $\mathbb{R}$) suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0. \tag{1.7}$$

- Si $\Delta > 0$, l'ensemble des solutions de (1.7) sont les fonctions de la forme :
$$x : t \longmapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$
où r_1 et r_2 sont les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.
- Si $\Delta = 0$, l'ensemble des solutions de (1.7) sont les fonctions de la forme :
$$x : t \longmapsto C_1 e^{r_0 t} + C_2 t e^{r_0 t}$$
où r_0 est l'unique solution de $ax^2 + bx + c = 0$.
- Si $\Delta < 0$, l'ensemble des solutions de (1.7) sont les fonctions de la forme :
$$x : t \longmapsto C_1 \cos(\beta t) e^{\alpha t} + C_2 \sin(\beta t) e^{\alpha t}$$
où $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ sont les deux solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.

Démonstration.

- Supposons $\Delta > 0$. Il est immédiat de vérifier que les fonctions $t \longmapsto e^{r_1 t}$ et $t \longmapsto e^{r_2 t}$ sont bien des solutions de l'équation (1.7). Par linéarité du problème, toutes les fonctions de la forme $t \longmapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ sont donc également solutions.
On va montrer que ce sont les seules.
On considère donc une fonction dérivable $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de (1.7). En s'inspirant des équations d'ordre 1, on pose $y(t) = e^{-r_1 t} x(t)$. On obtient alors
$$ay'' + (2ar_1 + b)y' + (ar_1^2 + br_1 + c)y = 0.$$
En utilisant le fait que r_1 est une racine de $ax^2 + bx + c$, on a donc :
$$ay'' + (2ar_1 + b)y' = 0.$$
Ainsi, y' est solution d'une équation d'ordre 1 à coefficients constants. On a donc $y'(t) = Ce^{\left(-2r_1 - \frac{b}{a}\right)t} = Ce^{(r_2 - r_1)t}$.
Finalement, cela implique $y(t) = C_1 e^{(r_2 - r_1)t} + C_2$ et donc que
$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$
- Supposons $\Delta = 0$. Là aussi, il est immédiat de vérifier que toutes les fonctions de la forme $t \longmapsto C_1 e^{r_0 t} + C_2 t e^{r_0 t}$ sont bien solutions.
On considère ensuite une fonction dérivable $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de (1.7). En posant $y(t) = e^{-r_0 t} x(t)$, on montre que $y''(t) = 0$ et donc que y est affine, d'où le résultat.
- Supposons que $\Delta < 0$. On vérifie que toutes les fonctions données sont bien solutions de l'équation différentielle.
Pour montrer que ce sont les seules, on va s'intéresser à la résolution complexe de l'équation différentielle $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$.
On rappelle qu'une fonction à valeurs complexes $x : t \in I \longmapsto x(t) \in \mathbb{C}$ est dérivable si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des fonctions dérivables (réelles)). Dans ce cas, on a de plus $x' = (\mathrm{Re}(x))' + i(\mathrm{Im}(x))'$.
En fait, l'ensemble des fonctions à valeurs complexes $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant cette équation sont les fonctions de la forme
$$x(t) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)t} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}),$$

la preuve étant identique au cas $\Delta > 0$.
Il suffit alors d'écrire :

$$x(t) = e^{\alpha t}\left(\frac{C_1+C_2}{2}(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}) + \frac{C_1-C_2}{2}(e^{i\beta t}-e^{-i\beta t})\right)$$
$$= e^{\alpha t}\left((C_1+C_2)\cos(\beta t) + i(C_1-C_2)\sin(\beta t)\right).$$

Comme on cherche une fonction à valeurs réelles, on a nécessairement $x(0) \in \mathbb{R}$ et $x\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{R}$, ce qui impose $C_1 + C_2 \in \mathbb{R}$ et $i(C_1 - C_2) \in \mathbb{R}$, ce qui donne bien le résultat annoncé.

□

Exemple. Résoudre l'équation différentielle : $x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$.
Solution :
L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $x^2 + x + 1 = 0$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = -3$. Les deux solutions sont $r_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
D'après la proposition 1.6, les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$x(t) = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) e^{\frac{t}{2}} + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) e^{\frac{t}{2}} \qquad (\text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Remarque. *On peut, de manière similaire aux équations différentielles d'ordre 1, résoudre un problème de Cauchy. Afin de déterminer une solution de manière unique, la seule donnée de la valeur de $x(t_0)$ est insuffisante. Les conditions initiales doivent également comprendre la donnée de la valeur de $x'(t_0)$. Ce résultat sera retrouvé dans les chapitres suivants.*

Histoire – Équations différentielles d'ordre 2

La deuxième loi de Newton explique toute l'importance des équations différentielles linéaires du second ordre pour la physique. Dans le cas où les coefficients sont non constants, il n'existe cependant pas d'expression générale des solutions. Cela explique pourquoi les mathématicien-ne-s ont cherché, au XIXe siècle, à exprimer les solutions en fonctions de solutions d'équations différentielles particulières (fonctions d'Airy, fonctions de Bessel, *etc.*). Dans le cas où l'on connaît une des solution, le Wronskien permet en outre de trouver toutes les solutions (voir chapitre suivant).

Exercices

Exercice 1. Équation d'ordre 1 à coefficient constant
Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle I.

1. $x'(t) = -x(t) + 7$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $x'(t) = 2x(t) + \dfrac{e^{2t}}{t}$ sur $I =]0\,;+\infty[$
3. $x'(t) = \dfrac{1}{2}x(t) + t^2$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $x'(t) + x(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+3t^2}$ sur $I = R$
5. $x'(t) = x(t) - te^t$ sur $I = \mathbb{R}$
6. $x'(t) = -\dfrac{1}{3}x(t) + \sin(2t)$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice 2. Équation d'ordre 1 à coefficient variable
Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle I.

1. $x'(t) = e^t x(t)$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $x'(t) = \dfrac{2x(t)}{t} + \ln(t)$ sur $I =]0\,;+\infty[$
3. $x'(t) = 3tx(t) - 5t$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $x'(t) = \tan(t)x(t) + \sin(t)$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 3. Principe de superposition

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. soit $b_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues un intervalle I. Montrer que si x_1 est solution de $x'(t) = ax(t) + b_1(t)$ sur I et si x_2 est solution de $x'(t) = ax(t) + b_2(t)$ sur I, alors $x_1 + x_2$ est solution de $x'(t) = ax(t) + b_1(t) + b_2(t)$ sur I.
2. Application : résoudre l'équation $x'(t) = 3x(t) + \cos(t) - \sin(5t)$.
3. Le principe de superposition démontré à la question 1 reste-t-il valable dans le cas où a est une fonction continue sur I ?

Exercice 4. Équation d'ordre 2 à coefficients constants

1. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.
   (a) $x''(t) + 5x'(t) - 3x(t) = 0$
   (b) $x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$
2. (a) Énoncer et démontrer une proposition similaire à la Proposition 1.2 pour les équations différentielles d'ordre 2. Appliquer ensuite ce résultat pour résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.
   (b) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = t^2 + 1$
   (c) $x''(t) + 3x'(t) - x(t) = e^{2t}$

Exercice 5. Problèmes de Cauchy

1. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation $x'(t) + x(t) = t + 2$ avec $x(0) = 0$
2. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation $x'(t) = 2x(t) + te^{2t}$ avec $x(0) = 0$
3. Résoudre sur $I =]0\,;\pi[$ l'équation $\sin(t)x'(t) + \cos(t)x(t) = \sin^2(t)$ avec $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
4. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation $x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = 0$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.

Exercice 6. Résoudre, pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle ordinaire

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ x'(t) + \frac{a}{t}x(t) = \frac{b}{t^a}, \quad \text{avec} \quad x(1) = 1.$$

Exercice 7. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation $x'(t) + 2x(t) = \sin(t)$ avec $x(0) = 0$ en appliquant la formule de Duhamel. Que peut-on dire de la complexité des calculs ?

Chapitre 2

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

1 Premiers résultats

1. Définition du problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $t_0 \in I$, soit $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Problème : On cherche une fonction $X : t \in I \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \star \quad X \text{ est dérivable sur } I \text{ (ce qui signifie que } \forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ x_i \text{ est dérivable sur } I) \\ \star \quad \forall t \in I,\ X'(t) = AX(t) \\ \star \quad X(t_0) = X^{(0)} \end{cases} \tag{2.1}$$

Remarque.

- *Le cas de la dimension $n = 1$ a été traité dans le chapitre précédent.*
- *En introduction, le cas du système RLC donne un exemple de problème menant à un système différentiel linéaire à coefficients constants. La matrice du système était $A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Résoudre $X'(t) = AX(t)$ revient à déterminer n fonctions réelles $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ satisfaisant aux n équations différentielles suivantes :

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t)$$

Dans le cas où A est diagonalisable, on va voir qu'il sera possible de « séparer » les variables afin d'obtenir des équations dans lesquelles une seule fonction x_i apparaît.

2. Cas diagonalisable dans $\mathbb{R}$

Supposons que A soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (pas nécessairement deux à deux distinctes) telles que

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable. On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Alors Y est une fonction dérivable, car chacune de ses composantes est une combinaison linéaires des fonctions x_i. On a donc

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\iff X'(t) = PDP^{-1}X(t) \\ &\iff P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) \\ &\iff Y'(t) = DY(t) \\ &\iff \forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad y_i'(t) = \lambda_i y_i(t). \end{aligned}$$

On résout alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$, $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$ avec la condition initiale $y_i(t_0) = \left(P^{-1}X^{(0)}\right)_i$. On obtient ainsi :

$$y_i(t) = \left(P^{-1}X^{(0)}\right)_i e^{\lambda_i(t-t_0)}.$$

Cela donne

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & & \\ & e^{\lambda_2(t-t_0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix} P^{-1}X^{(0)}$$

et donc

$$X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & & \\ & e^{\lambda_2(t-t_0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix} P^{-1}X^{(0)}$$

Si on note $(v_1, \ldots, v_n)$ la base de vecteurs propres dont la matrice de passage est P, on voit que

$$P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & & \\ & e^{\lambda_2(t-t_0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix} = Mat(e^{\lambda_1(t-t_0)}v_1 ; e^{\lambda_2(t-t_0)}v_2 ; \ldots ; e^{\lambda_n(t-t_0)}v_n).$$

En multipliant ensuite cette matrice par le vecteur $P^{-1}X^{(0)}$ à droite, on voit que $X(t)$ est une combinaison linéaire des colonnes de $Mat(e^{\lambda_1(t-t_0)}v_1 ; e^{\lambda_2(t-t_0)}v_2 ; \ldots ; e^{\lambda_n(t-t_0)}v_n)$. On aboutit donc au résultat suivant :

Proposition 2.1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et $v_1, \ldots v_n$ une base de vecteurs propres de A. Alors les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ sont les fonctions de la forme

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t} v_k \qquad (\text{avec } C_k \in \mathbb{R} \text{ pour tout } k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Remarque. *Par analogie avec le problème homogène scalaire à coefficient constant où la solution était* $e^{a(t-t_0)}x_0$*, on a envie de définir la matrice*

$$P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & & \\ & e^{\lambda_2(t-t_0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix}P^{-1}, \text{ comme étant } \exp(A(t-t_0)).$$

Remarque. *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée (théorème spectral). Dans le cas où* A *est une matrice symétrique, la méthode de résolution par diagonalisation fonctionne ainsi à coup sûr.*

3. Lien avec les équations différentielles scalaires linéaires d'ordre n

La résolution des équations différentielles scalaires linéaires et homogènes d'ordre n peut se ramener directement à la résolution d'un système différentiel.
En effet, supposons que l'on souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1x' + a_0x(t) = 0. \tag{2.2}$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$.
Ainsi, x est solution de (2.2) si, et seulement si,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ -a_{n-1}x^{(n-1)} - \ldots - a_1x' - a_0x(t) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} X(t)$$

ce qui signifie justement que la résolution de (2.2) est équivalente à la résolution d'un système linéaire (à coefficients constants) de taille $n \times n$.

4. Trajectoires et portrait de phase, points d'équilibre

On donne enfin dans ce paragraphe une série de définition portant sur les solutions des systèmes différentiels et de leurs propriétés. On suppose que $I = \mathbb{R}$ et $t_0 = 0$.

Définition 2.1 – Points d'équilibre

On appelle point d'équilibre du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, tout élément du noyau de la matrice A, c'est à dire tout point $X^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX^{(1)} = 0$.

Définition 2.2 – Points d'équilibre stables

On appelle point d'équilibre stable du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, tout point d'équilibre $X^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $X^{(0)} \in B(X^{(1)}, \delta)$, la solution du problème de Cauchy $X'(t) = AX(t)$, avec $X(0) = X^{(0)}$, vérifie $X(t) \in B(X^{(1)}, \varepsilon)$ pour tout $t \geqslant 0$.

Définition 2.3 – Points d'équilibre asymptotiquement stables

On appelle point d'équilibre asymptotiquement stable du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, tout point $X^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ point d'équilibre stable du système différentiel, et tel qu'il existe $\mu > 0$ tel que, pour tout $X^{(0)} \in B(X^{(1)}, \mu)$, la solution du problème de Cauchy $X'(t) = AX(t)$, avec $X(0) = X^{(0)}$, vérifie

$$\lim_{t \to \infty} X(t) = X^{(1)}.$$

Définition 2.4 – Trajectoires (ou orbites)

On appelle trajectoire (ou orbite) du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, un sous-ensemble $\mathscr{T}$ de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une fonction dérivable $X : I \to \mathbb{R}^n$ avec $X'(t) = AX(t)$ pour tout $t \in I$ et

$$\mathscr{T} = \{X(t), t \in I\}.$$

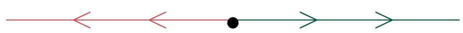
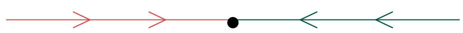
Remarque.

- *Si $X^{(1)}$ est un point d'équilibre du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, alors $\{X^{(1)}\}$ est une trajectoire.*
- *En général, lorsqu'on trace les trajectoires dans $\mathbb{R}^n$, on ajoute des flèches pour indiquer le sens de parcours.*

Définition 2.5 – Portrait de phase

On appelle portrait de phase du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, l'ensemble de toutes les trajectoires du système différentiel.

Exemple. On considère l'équation $x'(t) = ax(t)$ en dimension 1 (où $a \in \mathbb{R}$).

- Si $a = 0$, tous les points $x \in \mathbb{R}$ sont des points d'équilibre. Les solutions sont les fonctions constantes et le portrait de phase est constitué de tous les singletons $\{a\}$ (avec $a \in \mathbb{R}$).
- Si $a > 0$, le seul point d'équilibre est $x = 0$. De plus, les solutions sont de la forme $x(t) = Ce^{at}$. Dans le cas $C > 0$, la trajectoire est $\{Ce^{at}, t \in \mathbb{R}\} =]0; +\infty[$. Dans le cas $C < 0$, la trajectoire est $\{Ce^{at}, t \in \mathbb{R}\} =]-\infty; 0[$.
  Finalement, le portrait de phase est constitué des trois trajectoires suivantes :
  $$\Big\{\{0\}\,;]-\infty;0[\,;]0;+\infty[\Big\}$$
  
- Si $a > 0$, le seul point d'équilibre est également $x = 0$. En raisonnant comme dans le cas $a > 0$, le portrait de phase est constitué des trois trajectoires suivantes :
  $$\Big\{\{0\}\,;]-\infty;0[\,;]0;+\infty[\Big\}$$
  L'orientation est néanmoins différente.
  

Le point d'équilibre $x = 0$ est ici un point d'équilibre asymptotiquement stable (contrairement au cas $a > 0$).

2 Systèmes différentiels en dimension 2

On souhaite résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ sur $I = \mathbb{R}$ avec la condition initiale $X(t_0) = X^{(0)}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $X^{(0)} \in \mathbb{R}^2$. On notera $X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$ les composantes de $X(t)$.

Remarque. *Si $X'(t) = AX(t)$, le système s'écrit*

$$\begin{cases} X_1'(t) = aX_1(t) + bX_2(t) \\ X_2'(t) = cX_1(t) + dX_2(t) \end{cases}$$

Il est alors facile d'établir que X_1 vérifie $X_1''(t) - (a+d)X_1'(t) + (ad-bc)X_1(t) = 0$.
La résolution des équations du second ordre à coefficients constant (Chapitre 1, partie 4) donne alors l'expression de $X_1(t)$ (idem pour $X_2(t)$). Il n'est en fait pas anodin de remarquer que l'équation caractéristique associée à cette équation d'ordre deux ($x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$) est exactement le polynôme caractéristique de la matrice A. La suite de cette partie vise à retrouver l'expression de $X_1(t)$ et $X_2(t)$ en distinguant les cas selon les valeurs propres de A afin de comprendre le lien entre le problème de réduction matricielle et celui de la résolution d'un système différentiel linéaire.

Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A (éventuellement complexes), le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2.$$

Son discriminant est $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$. On va distinguer les trois cas suivants :

- $\Delta > 0$: les valeurs propres de A sont réelles et distinctes
- $\Delta < 0$: les valeurs propres de A sont deux nombres complexes conjugués (non réels)
- $\Delta = 0$: la matrice A admet une valeur propre double (nécessairement réelle).

1. Cas $\Delta > 0$: les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Dans ce cas, la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Ce qui a été fait précédemment s'applique et on a donc :

$$X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} \end{pmatrix} P^{-1} X^{(0)}$$

où P désigne la matrice formée par les vecteurs propres de A.
On obtient ainsi le résultat suivant :

Proposition 2.2

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si A admet deux valeurs propres réelles distinctes, les solutions de $X'(t) = AX(t)$ sont les fonctions $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme :

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} + D_1 e^{\lambda_2 t} \\ C_2 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

où C_1, C_2, D_1 et D_2 sont des réels.

Remarque. *Les réels C_1, C_2, D_1 et D_2 dépendent naturellement des conditions initiales t_0 et $X^{(0)}$.*

2. Cas $\Delta < 0$: les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont complexes non réelles

Dans ce cas, comme A est une matrice réelle et donc que $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

On commence par traiter un premier exemple simple où $\chi_A(X) = X^2 + 1$:

a. Cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Le système à résoudre est

$$\begin{cases} X_1'(t) = X_2(t) \\ X_2'(t) = -X_1(t) \end{cases}$$

Ainsi, si X est solution, en dérivant la première équation

$$\forall t \in I, \quad x_1''(t) = x_2'(t) = -x_1(t).$$

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_1(t) = C_1 cos(t - t_0) + D_1 \sin(t - t_0)$.
Par suite, $x_2(t) = x_1'(t) = -C_2 \sin(t - t_0) + D_2 \cos(t - t_0)$.
Pour $t = t_0$, on trouve avec les conditions initiales : $C_1 = X_1^{(0)}$ et $D_2 = X_2^{(0)}$.
Ainsi, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \cos(t - t_0) + x_2^{(0)} \sin(t - t_0) \\ -x_1^{(0)} \sin(t - t_0) + x_2^{(0)} \cos(t - t_0) \end{pmatrix}$.
Réciproquement, il est immédiat de vérifier que cette solution convient.

Avant de passer au cas général, on traitera l'exemple suivant, légèrement plus compliqué, où $\chi_A(X) = (\alpha - X)^2 + \beta^2$.

b. Cas où $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Le système à résoudre est

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha x_1(t) - \beta x_2(t) \\ x_2'(t) = -\beta x_1(t) + \alpha x_2(t) \end{cases}$$

Ainsi, si X est solution, en dérivant la première équation

$$\forall t \in I, \quad x_1''(t) = \alpha x_1'(t) - \beta x_2'(t) = \alpha x_1'(t) + \beta^2 x_1(t) - \alpha\beta x_2(t)$$

En multipliant la première ligne du système par α, on obtient : $-\alpha\beta x_2(t) = \alpha x_1'(t) - \alpha^2 x_1(t)$.
Finalement, x_1 vérifie l'équation différentielle suivante :

$$x_1''(t) - 2\alpha x_1'(t) + (\alpha^2 + \beta^2) x_1(t) = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = -4\beta^2 < 0$ et les deux solutions sont $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. Le cas scalaire d'ordre deux permet de conclure que

$$x_1(t) = e^{\alpha t} \left(C_1 \cos(\beta t) + D_1 \sin(\beta t) \right)$$

De même

$$x_2(t) = e^{\alpha t} \left(C_2 \cos(\beta t) + D_2 \sin(\beta t) \right).$$

c. Cas général

L'étude du cas général se ramène au cas précédent à l'aide du lemme ci-dessous.

Lemme 2.3

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\chi_A(X)$ admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.
La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Remarque. *Si* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, d'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme,*

$$\alpha = \frac{Tr(A)}{2} = \frac{a+d}{2} \quad \textit{et} \quad \alpha^2 + \beta^2 = \lambda_1\lambda_2 = \det(A) \quad \textit{donc} \quad \beta^2 = -bc - \left(\frac{a-d}{2}\right)^2.$$

Démonstration. Les valeurs propres (complexes) de A sont $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.
On remarque que si $v_1 \in \mathbb{C}^2$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\alpha + i\beta$, le vecteur $\overline{v_1}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\alpha - i\beta$.
Ainsi, en posant $w_1 = v_1 + \overline{v_1} \in \mathbb{R}^2$ et $w_2 = i(v_1 - \overline{v_1}) \in \mathbb{R}^2$, ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$ et :

$$\begin{cases} Aw_1 = A(v_1 + \overline{v_1}) = (\alpha + i\beta)v_1 + (\alpha - i\beta)\overline{v_1} = \alpha w_1 + \beta w_2 \\ Aw_2 = Ai(v_1 - \overline{v_1}) = (\alpha + i\beta)iv_1 - (\alpha - i\beta)i\overline{v_1} = -\beta w_1 + \alpha w_2 \end{cases}$$

Cela signifie exactement que, dans la base (w_1, w_2), la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. □

Proposition 2.4

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\chi_A(X)$ admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. L'ensemble des solutions de $X'(t) = AX(t)$ sont les fonctions $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme

$$\text{Pour i=1,2} \qquad x_i(t) = e^{\alpha t}\Big(C_i\cos(\beta t) + D_i\sin(\beta t)\Big), \qquad (\text{avec } C_i, D_i \in \mathbb{R}).$$

De plus, $\alpha = \dfrac{a+d}{2}$ et $\beta^2 = -bc - \left(\dfrac{a-d}{2}\right)^2$

Remarque. *Dans le cas d'un système physique, on note souvent $\beta = \omega$ car cela correspond à la pulsation du système (exprimée en Hz). Lorsque l'on néglige le terme d'amortissement (c'est-à-dire $a + d = 0$), le système est en effet périodique, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.*
De plus, on pourra retenir que le discriminant du polynôme caractéristique χ_A est $\Delta = -4\beta^2$.

Démonstration. Supposons que X est solution. D'après le lemme, A s'écrit $A = P\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}P^{-1}$.
En posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, $Y'(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}Y(t)$.
D'après le cas précédent, on obtient l'expression de $Y(t)$. L'expression de $X(t)$ est alors identique (les constantes sont néanmoins différentes) étant donné que les $X_i(t)$ sont des combinaisons linéaires des $Y_i(t)$.
Réciproquement, il est immédiat de vérifier que les fonctions données sont bien solutions.
Enfin, les expression de α et β en fonction de a, b, c et d ont déjà été établis (voir remarque page 29) □

3. Cas $\Delta = 0$: une unique valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

Lemme 2.5

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice réelle ayant une valeur propre double λ_0. Alors les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, $t \in I$ sont les fonctions $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme :

$$\text{Pour i=1,2} \qquad x_i(t) = e^{\lambda_0 t}\left(C_i t + D_i\right), \qquad (\text{avec } C_i, D_i \in \mathbb{R}).$$

De plus, $\lambda_0 = \dfrac{a+d}{2}$.

Démonstration. Nous savons qu'il existe une matrice de passage P inversible telle que

$$A = PTP^{-1},$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \qquad (a \in \mathbb{R}^*).$$

Nous posons $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_0 y_1(t) + a y_2(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_0 y_2(t). \end{aligned}$$

Donc $y_2(t) = Ce^{\lambda_0 t}$, ce qui conduit à

$$y_1'(t) = \lambda_0 y_1(t) + aCe^{\lambda_0 t}.$$

L'étude des équations différentielles linéaires scalaires nous a permis de savoir que, dans cette situation, on trouve

$$y_1(t) = e^{\lambda_0 t}\left(C_1 t + D_1\right).$$

En écrivant $X(t) = PY(t)$, nous obtenons le résultat recherché.

□

3 Le cas général : résolution à l'aide de l'exponentielle matricielle

1. Espace des solutions

Nous avons vu sur des cas particuliers comment résoudre le problème (2.1). Le cas général est couvert par la notion d'exponentielle de matrice, qui repose sur le théorème suivant.

Théorème 2.6 – Exponentielle matricielle

Soit un entier $n > 0$. Il existe une fonction notée $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :

1. $\exp(0_n) = \mathrm{Id}_n$;
2. Pour toute paire de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent (c'est-à-dire $AB = BA$), alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent ;
3. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A commute avec $\exp(A)$;
4. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
5. L'application exp est continue.
6. L'application $t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(tA) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dérivable, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$$

.

La preuve de ce théorème fait l'objet de la section suivante. Revenons au problème qui consiste à trouver une fonction $X : t \in I \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait (2.1). Pour tout $t \in I$, on a donc, par multiplication à gauche par $\exp(-(t-t_0)A)$,

$$\exp(-(t-t_0)A)X'(t) - A\exp(-(t-t_0)A)X(t) = 0.$$

On définit la fonction dérivable $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par $Y(t) = \exp(-(t-t_0)A)X(t)$. L'égalité ci-dessus exprime que pour tout $t \in I$, $Y'(t) = 0$. Donc le vecteur $Y(t)$ est constant pour tout $t \in I$, donc égal à $Y(t_0) = \mathrm{Id}_n X^{(0)} = X^{(0)}$. Comme les matrices A et $-A$ commutent, on a

$$\exp(-tA + tA) = \mathrm{Id}_n = \exp(tA)\exp(-tA).$$

Donc

$$\exp(tA)Y(t) = \exp(tA)\exp(-tA)X(t) = X(t) = \exp(tA)X^{(0)}.$$

On a donc trouvé une condition nécessaire sur la solution $X(t)$. On vérifie immédiatement, au moyen des propriétés de l'exponentielle, que cette condition est également suffisante, ce qui conclut la résolution du problème (2.1).

Remarque. *Le calcul de l'exponentielle de matrice conduit aux mêmes opérations que celles qui ont été nécessaires dans les exemples de matrices A (diagonalisables, non diagonalisables,...) étudiés dans les paragraphes précédents.*

Théorème 2.7 – Espace vectoriel des solutions

L'ensemble S des fonctions $X : I \to \mathbb{R}^n$ solutions de l'équation $X'(t) = AX(t)$ est un espace vectoriel de dimension n.

Démonstration. La relation $X(t) = \exp(tA)X^{(0)}$ permet de définir l'application linéaire suivante : $\varphi : \mathbb{R}^n \to S$, $X^{(0)} \mapsto X$ avec $X(t) = \exp(tA)X^{(0)}$. Cette application est surjective. Elle est injective car $\exp(tA)$ est toujours inversible. $\square$

2. Lien entre solutions complexes et solutions réelles

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$.
Z est une solution (complexe) de $X'(t) = AX(t)$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont des solutions (réelles) de ce même système. Or, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et si Z est une solution complexe non réelle, alors $\overline{Z}$ est également une solution et $(Z, \overline{Z})$ forme une famille libre de solutions.
Ainsi, si on connaît une solution complexe Z, on remplace la famille $(Z, \overline{Z})$ par la famille $(\mathrm{Re}(Z), \mathrm{Im}(Z))$ (qui est également libre, la preuve est laissée au lecteur) pour obtenir les solutions réelles.

Comme l'espace des solutions réelles (vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est de même dimension que l'espace des solutions complexes (vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel), on obtient ainsi une base de l'ensemble des solutions réelles.

Exemple. Déterminer une base des solutions (complexes puis réelles) du système différentiel $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X(t)$.

Solution :
Le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = (1-X)^2 + 4$. Ses racines sont $\lambda_1 = 1+2i$ et $\lambda_2 = 1-2i$. Un vecteur propre associé à λ_1 est $\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, deux solutions complexes linéairement indépendantes sont données par :

$$Z_1(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_2(t) = \overline{Z_1(t)} = e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, une base de l'espace des solutions réelles est :

$$\mathrm{Re}(Z_1(t)) = \mathrm{Re}(Z_2(t)) = e^t \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathrm{Im}(Z_1(t)) = -\mathrm{Im}(Z_2(t)) = e^t \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

4 Exponentielle de matrices

1. Remarques préliminaires

- Si E est un espace vectoriel normé, on peut parler de série convergente d'éléments de E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la série de terme général u_n, définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, est convergente si la suite S_n converge dans E, c'est-à-dire s'il existe $\overline{S} \in E$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|S_n - \overline{S}\| = 0$.
  Dans ce cas, on note $\overline{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une algèbre sur le corps des réels (une algèbre est espace vectoriel muni d'un produit interne distributif par rapport à l'addition et compatible avec la loi de composition externe).
  Comme le produit matriciel est associatif $\Big(A(BC) = (AB)C\Big)$, on dit que l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est associative.
  De plus, comme il existe un élément neutre pour le produit matriciel (l'identité), on dit que l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est unitaire.
- On appelle **norme d'algèbre** toute norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|.$$

- On définit la norme matricielle suivante sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\|A\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$. Il s'agit d'une norme d'algèbre.
  En effet, soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\|AB\| &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}|a_{ik}||b_{lj}|\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|b_{lj}| \\
&\leqslant \|A\|\|B\|
\end{aligned}$$

- On a aussi, pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_1 \leqslant \|A\|\,\|x\|_1$.

  En effet,

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}x_j| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\sum_{k=1}^{n}|x_k| \\
&\leqslant \|A\|\,\|x\|_1
\end{aligned}$$

- On pourrait choisir d'autres normes matricielles, comme par exemple les normes subordonnées.

2. Définition

Proposition 2.8

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série entière de terme général $\dfrac{A^k}{k!}$ est convergente.

Remarque. *Par convention,* $0! = 1$ *et* $A^0 = I_n$.

Démonstration. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, c'est un espace de Banach, il suffit donc de montrer que la série est absolument convergente.
Or, pour $N \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{k=0}^{N}\frac{\|A^k\|}{k!} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N}\frac{\|A\|^k}{k!} \quad \text{(car la norme est une norme matricielle)} \\
&\leqslant e^{\|A\|}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Définition 2.6 – Exponentielle de matrices

On appelle exponentielle de matrices l'application suivante :

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & \exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \end{array} \right.$$

Remarque. *De manière immédiate, on a* $\exp(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}) = I_n$.

3. Propriétés de l'exponentielle de matrices

Proposition 2.9

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Démonstration. En considérant la matrice

$$\Delta_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \frac{B^l}{l!}\right) - \sum_{m=0}^{n} \frac{(A+B)^m}{m!},$$

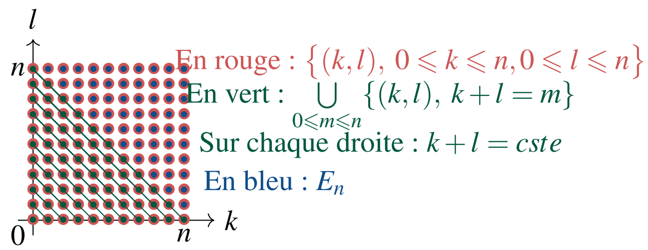
il suffit de montrer que $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme $AB = BA$, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$(A+B)^m = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} A^p B^{m-p} = \sum_{\substack{k+l=m \\ k\geqslant 0,\, l\geqslant 0}} m! \frac{A^k}{k!} \frac{B^l}{l!}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\frac{B^l}{l!} - \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{k+l=m \\ k\geqslant 0,\, l\geqslant 0}} \frac{A^k}{k!}\frac{B^l}{l!} \\ &= \sum_{(k,l)\in E_n} \frac{A^k}{k!}\frac{B^l}{l!} \qquad (\text{où } E_n = \{(k,l) \in \{0,1,\dots,n\}^2,\ k+l > n\}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \|\Delta_n\| &\leqslant \sum_{(k,l)\in E_n} \frac{\|A\|^k}{k!}\frac{\|B\|^l}{l!} \\ &\leqslant \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \frac{\|B\|^l}{l!}\right) - \sum_{m=0}^{n} \frac{(\|A\|+\|B\|)^m}{m!}}_{R_n} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = e^{\|A\|}e^{\|B\|} - e^{\|A\|+\|B\|} = 0$, on en déduit le résultat souhaité :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\Delta_n\| = 0$$

□

Remarque. *De la même manière que pour l'exponentielle de nombres réels ou complexes, on aurait pu montrer sce résultat grâce à la proposition générale suivante concernant les produits de Cauchy :*

Proposition 2.10

Soient (U_k) et (V_k) des suites à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\sum\limits_{k\geqslant 0} U_k$ est absolument convergente et si $\sum\limits_{k\geqslant 0} V_k$ est convergente, alors en notant $W_k = \sum\limits_{i=0}^{k} U_i V_{k-i}$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} W_k$ est convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k\geqslant 0} W_k = \left(\sum_{k\geqslant 0} U_k\right)\left(\sum_{k\geqslant 0} V_k\right)$$

La proposition 2.9 permet d'obtenir le résultat suivant de manière immédiate.

Corollaire 2.11

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est inversible et

$$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$$

Proposition 2.12

L'application $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est continue.

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\exp(A+M) - \exp(A) &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{(A+M)^k}{k!} - \sum_{k\geqslant 0} \frac{A^k}{k!} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \frac{(A+M)^k - A^k}{k!}
\end{aligned}$$

Or, en développant $(A+M)^k$ (attention, A et M ne commutent pas ici ! mais $\|A^{\alpha_1}M^{\beta_1}A^{\alpha_2}M^{\beta_2}\ldots A^{\alpha_s}M^{\beta_s}\| \leqslant \|A\|^{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}\|M\|^{\beta_1+\ldots+\beta_s}$), on obtient aisément :

$$\|(A+M)^k - A^k\| \leqslant (\|A\| + \|M\|)^k - \|A\|^k$$

Par suite, en passant à la limite à partir des inégalités sur les sommes partielles,

$$\begin{aligned}
\|\exp(A+M) - \exp(A)\| &\leqslant \sum_{k\geqslant 0} \frac{(\|A\|+\|M\|)^k - \|A\|^k}{k!} \\
&\leqslant \underbrace{\exp(\|A\|+\|M\|) - \exp(\|A\|)}_{\underset{M\to 0}{\longrightarrow} 0}
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.13

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $t \in \mathbb{R} \longrightarrow \exp(tA) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dérivable. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$$

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$.

$$\exp((t+h)A) = \exp(tA+hA) = \exp(tA)\exp(hA) \quad \text{(car } tA \text{ et } hA \text{ commutent)}$$

Par conséquent,

$$\frac{\exp((t+h)A)-\exp(tA)}{h} = \exp(tA)\times\left(\frac{\exp(hA)-I_n}{h}\right) = \exp(tA)\times\left(A+\sum_{k\geqslant 2}\frac{h^{k-1}A^{k-1}}{k!}\right)$$

Le résultat découle alors du fait que $\exp(tA)\sum_{k\geqslant 2}\dfrac{h^{k-1}A^{k-1}}{k!}$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.
En effet,

$$\left\|\exp(tA)\left(\sum_{k\geqslant 2}\frac{h^{k-1}A^{k-1}}{k!}\right)\right\| \leqslant \|\exp(tA)\|\left(\sum_{k\geqslant 2}\frac{|h|^{k-1}\|A\|^{k-1}}{k!}\right) \leqslant |h|\,\|\exp(tA)\|\times\sum_{k\geqslant 0}\frac{|h|^k\|A\|^k}{(k+1)!}$$

et le résultat découle du fait que la série $\dfrac{|h|^k\|A\|^k}{(k+1)!}$ est normalement convergente donc bornée au voisinage de 0. L'égalité $\dfrac{d}{dt}(\exp(tA)) = \exp(tA)A$ découle du fait que tA commute avec A et donc que $\exp(tA)$ commute avec A. □

5 Calcul effectif de solutions

On a vu que le calcul de solutions d'un système différentiel à coefficients constants se ramène au calcul de l'exponentiel matriciel. Pour cela, dans cette partie, on présente indifféremment des méthodes permettant de calculer directement les solutions (comme dans le Théorème **??**) ou qui donne un moyen de calculer l'exponentiel d'une matrice (comme dans la Proposition **??**).

1. Exponentiel d'une matrice diagonalisable

Si A est diagonalisable on peut écrire $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible. On a alors $A^k = PD^kP^{-1}$.

Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

On en déduit, par somme et passage à la limite, que :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{D^k}{k!}\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}$$

2. Cas nilpotent

Si A est une matrice nilpotente (c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que $A^n = 0$), alors

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!}$$

Dans toute la suite de cette partie, on se limitera à déterminer les solutions complexes, étant entendu que la procédure permettant de passer aux solutions réelles est simple et toujours possible. Bien sûr l'intérêt de travailler dans $\mathbb{C}$ est que le polynôme caractéristique sera tout scindé.

3. Cas général avec le lemme des Noyaux

Lemme 2.14 – Lemme des noyaux

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Soient $P_1, P_2, \dots, P_s \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Alors

$$\operatorname{Ker}\left(\prod_{k=1}^{s} P_k(f)\right) = \bigoplus_{k=1}^{s} \operatorname{Ker}(P_k(f))$$

De plus, pour tout $k_0 \in \{1, \dots, s\}$, la projection sur $\operatorname{Ker}(P_{k_0}(f))$ parallèlement à $\bigoplus_{k \neq k_0} \operatorname{Ker}(P_k(f))$ (défini comme endomorphisme de $\bigoplus_{k=1}^{s} \operatorname{Ker}(P_k(f))$) est la restriction d'un polynôme en f.

Démonstration. Il suffit de montrer la proposition pour $n = 2$. On conclut ensuite par récurrence sur n. Soit donc $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Il s'agit de montrer que $\operatorname{Ker}(P_1P_2(f)) = \operatorname{Ker}(P_1(f)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(f))$.
Le point-clé de la démonstration est le théorème de Bézout : comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, il existe deux polynômes U et V tels que $UP_1 + VP_2 = 1$ et donc :

$$(UP_1)(f) + (VP_2)(f) = Id_E.$$

- Montrons que $\operatorname{Ker}(P_1P_2(f)) \subset \operatorname{Ker}(P_1(f)) + \operatorname{Ker}(P_2(f))$.
  Soit $x \in \operatorname{Ker}(P_1P_2(f))$. On pose $y = (UP_1)(f)(x)$ et $z = (VP_2)(f)(x)$. On a $x = y + z$. De plus, $P_2(y) = (UP_1P_2)(f)(x) = 0$ et, de même, $P_1(z) = 0$.
  Ainsi, x s'écrit bien comme la somme d'un élément de $\operatorname{Ker}(P_1(f))$ et d'un élément de $\operatorname{Ker}(P_2(f))$.
- Montrons que $\operatorname{Ker}(P_1(f)) + \operatorname{Ker}(P_2(f)) \subset \operatorname{Ker}(P_1P_2(f))$.
  Soit $x = y + z \in \operatorname{Ker}(P_1(f)) + \operatorname{Ker}(P_2(f))$. Il est immédiat de voir que $P_1P_2(f)(x) = 0$ et donc que $x \in \operatorname{Ker}(P_1P_2(f))$.
- Montrons enfin que $\operatorname{Ker}(P_1(f))$ et $\operatorname{Ker}(P_2(f))$ sont en somme directe.
  Soit $x \in \operatorname{Ker}(P_1(f)) \bigcap \operatorname{Ker}(P_2(f))$.
  En écrivant $x = (UP_1)(f)(x) + (VP_2)(f)(x)$, on en déduit que $x = 0$.
- Le dernier point du lemme est clair car la projection sur $\operatorname{Ker}(P_1(f))$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(P_2(f))$ est définie par $x \longmapsto (VP_2)(f)(x)$ qui est bien un polynôme en f.

$\square$

Corollaire 2.15 – Décomposition en sous-espaces caractéristiques

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n (avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) et $f\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Soit $\chi_f(X)=\prod_{k=1}^{s}(\lambda_k-X)^{n_k}$ son polynôme caractéristique avec $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in\mathbb{C}$ les valeurs propres de f deux à deux distinctes. Alors le **sous-espace caractéristique** $N_k:=\mathrm{Ker}(f-\lambda_k Id)^{n_k}$ est de dimension n_k et l'on a :

$$\mathbb{C}^n=\bigoplus_{k=1}^{s}N_k \quad \text{et} \quad n=\sum_{k=1}^{s}n_k.$$

Démonstration. Il suffit de prouver que N_k est de dimension n_k. Le reste est une conséquence immédiate du lemme des noyaux et du théorème de Cayley-Hamilton.
On note $m_k=\dim(N_k)$. Alors $f-\lambda_k Id$ restreint à N_k est nilpotent d'indice n_k. La matrice de f restreinte à N_k est donc semblable à une matrice $m_k\times m_k$ triangulaire supérieure de la forme :

$$\begin{pmatrix}
\lambda_k & \star & \star & \cdots & \star\\
0 & \lambda_k & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \lambda_k & \star\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k
\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\chi_{f_{|N_k}}=(\lambda_k-X)^{m_k}$. On note $G_k=\bigoplus_{j\neq k}N_k$. Alors λ_k n'est pas valeur propre de f restreint à G_k.
On a donc $\chi_f=\chi_{f_{|N_k}}\chi_{f_{|G_k}}=(\lambda_k-X)_k^m\chi_{f_{|G_k}}$ et la multiplicité de λ_k dans χ_f est ainsi m_k. Cela prouve au final que $n_k=m_k$. $\square$

Théorème 2.16

Soient $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ On note $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in\mathbb{C}$ ses valeurs propres deux à deux distinctes et $n_1,\dots,n_s$ leurs multiplicités respectives. Pour tout $k\in\{1,\dots,s\}$, on considère $(v_{k,j})_{1\leqslant j\leqslant n_k}$ une base du sous-espace caractéristique $N_k:=\mathrm{Ker}(A-\lambda_k Id)^{n_k}$. On définit

$$Z_{k,j}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C})\\ t & \longmapsto & e^{\lambda_k t}\left(I_n+\dfrac{t}{1!}(A-\lambda_k I_n)^1+\ldots+\dfrac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-1}\right)v_{k,j}\end{array}\right.$$

Alors, la famille $Z_{1,1},\dots,Z_{1,n_1},\dots,\dots,Z_{s,1},\dots,Z_{s,n_s}$ est une base de solutions (complexes) du système différentiel $X'(t)=AX(t)$.

Démonstration. On identifie la matrice A avec son endomorphisme canoniquement associé. Sur l'espace N_k, la restriction de $A-\lambda_k Id$ est nilpotente d'indice k. Comme $\lambda_k Id$ et $A-\lambda_k Id$ commutent, on a donc $e^A=e^{\lambda_k Id}e^{A-\lambda_k Id}=e^{\lambda_k}e^{A-\lambda_k Id}$ et l'expression des solutions en résulte. $\square$

4. Cas général avec la décomposition de Jordan

Il est possible de construire des bases particulières des sous-espaces caractéristiques considérés dans la partie précédente afin de simplifier certains termes de la formule donnée par le théorème 2.16.

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_s$, de multiplicités $n_1,\dots,n_s$ avec $\sum_{k=1}^{s}n_k=n$. On va voir que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & M_{s-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_s \end{pmatrix}$, avec M_k de la forme

$$M_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & a_1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_k & a_{n_{k-1}} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

où $a_1, \dots a_{n_k-1} \in \{0;1\}$.

Autrement dit, la décomposition de Jordan présentée ci-dessous permet non seulement de trigonaliser un endomorphisme sur un de ses sous-espace caractéristique (comme cela était expliqué dans la partie précédente), mais cela permet également d'obtenir une matrice triangulaire supérieure la plus simple possible.

Plus précisément, pour construire base du sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k}$, dans laquelle la matrice A est semblable à une matrice M_k on procède de la manière suivante :

Méthode – Déterminer une base dans laquelle une matrice a la forme d'un bloc de Jordan

- On considère un supplémentaire F_{n_k} de $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-1}$ dans $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k}$. On a donc
$$F_{n_k} \oplus \mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-1} = \mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k}.$$
On considère alors une base $v_{k,1}, \dots, v_{k,p}$ de F_{n_k}.
- La famille $(A-\lambda_k I_n)(v_{k,1}), \dots, (A-\lambda_k I_n)(v_{k,p})$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-1}$. De plus, l'espace vectoriel engendré par cette famille est en somme directe avec $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-2}$. On le complète en une base d'un supplémentaire F_{n_k-1} de $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-2}$ dans $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-1}$. On a
$$F_{n_k-1} \oplus \mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-2} = \mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-1}$$
et
$$F_{n_k} \oplus F_{n_k-1} \oplus \mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-2} = \mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k}.$$
- À chaque étape, on considère les images par $A-\lambda_k I_n$ des vecteurs déjà construits et on complète pour former un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-j-1}$ dans $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-j}$.

Si v est un vecteur de la base ainsi construite, il y a deux possibilités :
- Si $v \in \mathrm{Ker}(A-\lambda_k In)$, (c'est-à-dire si v a été ajouté à la dernière étape de l'algorithme), on a naturellement $Av = \lambda_k v$.
- Sinon, v aura été ajouté avant la dernière étape. Le vecteur $w = (A-\lambda_k I_n)v$ sera donc également présent dans la base. On aura donc $Av = \lambda_k v + w$. En numérotant les vecteurs de la base de telle façon à ce que w soit juste avant v, on obtient bien une matrice de la forme annoncée.

Ainsi, si $A = P \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & M_{s-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_s \end{pmatrix} P^{-1}$, alors

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} \exp(M_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(M_2) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \exp(M_{s-1}) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \exp(M_s) \end{pmatrix} P^{-1},$$

et les $\exp(M_k)$ sont simples à calculer car toute matrice M_k est la somme d'une matrice d'homothétie et d'une matrice nipotente (elles commutent).

5. Cas général avec la décomposition de Dunford

Le calcul de l'exponentiel d'une matrice à l'aide de la décomposition de Dunford est fortement lié aux parties précédentes, la démonstration de l'existence de la décomposition de Dunford étant d'ailleurs basé sur le lemme des noyaux. Formellement, elle permet néanmoins de calculer l'exponentiel d'une matrice sans faire références aux sous-espaces caractéristiques et ne dépend pas du choix de bases.

Théorème 2.17 – Décomposition de Dunford

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
Il existe un unique couple de matrices (D,N) telles que D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$ et $A = D + N$.

Démonstration. Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ définit canoniquement par la matrice A. Il s'agit alors de montrer qu'il existe un unique couple d'endomorphismes (d,n) tel que d est diagonalisable, n est nilpotent, $d \circ n = n \circ d$ et $f = d + n$.
Posons $\chi_f = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)^{\alpha_k}$ où $\lambda_1,..., \lambda_s$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f.
Soit $N_k = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)^{n_k}$ le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_k, $1 \leqslant k \leqslant s$.
D'après le lemme des noyaux (Lemme 2.14), $E = N_1 \oplus ... \oplus N_s$. De plus, si f_k est la restriction de f à N_k alors f_k est un endomorphisme de N_k (car f et $(f - \lambda_k Id)^{n_k}$ commutent).
On note que $(f_k - \lambda_k Id)^{n_k} = 0$ et donc λ_k est l'unique valeur propre de f_k car toute valeur propre de f_k est racine du polynôme annulateur $(X - \lambda_k)^{n_k}$.
Existence de d et n.
On définit d par ses restrictions d_k aux E'_k, $1 \leqslant k \leqslant p$: d_k est l'homothétie de rapport λ_k. Puis on définit n par $n = f - d$.
d est diagonalisable car il existe une base de vecteurs propres de d. De plus, $f = d + n$.
Soit $n_{|N_k}$ la restriction de n à N_k. On a $n_{|N_k} = f_k - \lambda_k Id_{N_k}$ et par définition de N_k, $n_{|N_k}^{n_k} = 0$. Mais alors, si on pose $\alpha = \mathrm{Max}\{n_1,...,n_p\}$, on a $n_{|N_k}^{\alpha} = 0$ pour tout $k \in \{1,...,s\}$ et donc $n^{\alpha} = 0$. Ainsi, n est nilpotent.
Enfin, pour tout $k \in \{1,\dots,s\}$, $n_{|N_k}$ commute avec d_k car d_k est une homothétie et donc $nd = dn$.
Remarque :
En notant π_k la projection de f sur N_k parallèlement aux autres sous-espaces caractéristiques, le lemme des noyaux (Lemme 2.14) permet d'affirmer que $\pi_k \in \mathbb{K}[f]$. Or,

$$d = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \pi_k$$

Donc $d \in \mathbb{K}[f]$ et $n \in \mathbb{K}[f]$.
Unicité de d et n.

Supposons que $f = d' + n'$ est une autre décomposition.
On a alors $d' - d = n - n'$.
Or, d' commute avec d (car d et n sont des polynômes en f).
Ainsi, d et d' sont co-diagonalisables ce qui entraine que $d' - d = n - n'$ est diagonalisable.
De plus, n et n' commutent donc, d'après le binôme, pour p assez grand, $(n - n')^p = 0$.
Ainsi, $d' - d = n - n' = 0$. □

Remarque.

- *Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé et toute matrice admet donc une décomposition de Dunford.*
- *La démonstration précédente permet de compléter le théorème de Décomposition de Dunford : les matrices D et N sont des polynômes en A. De plus, le polynôme caractéristique de D est égal à celui de A.*
- *Attention, la décomposition de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car les matrices ne commutent pas. En fait, la décomposition de A est $A + 0$ car A est déjà une matrice diagonalisable.*

Proposition 2.18

Si $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$, alors

$$\exp(A) = \exp(D) \times \exp(N)$$

Remarque. *On peut alors calculer* $\exp(D)$ *et* $\exp(N)$ *par les méthodes vues dans les parties précédentes.*

Remarque. *Le calcul de la décomposition de Dunford donné par la démonstration du Théorème 2.17 nécessite de savoir déterminer les racines du polynôme caractéristique. Il est en général impossible d'obtenir la factorisation exacte. On peut alors, soit calculer les racines de manière approchée, soit utiliser un algorithme inspiré de la méthode de Newton et qui donne la décomposition de Dunford sans avoir à trouver les racines du polynôme caractéristique (voir Proposition 2.19). À noter tout de même que, une fois la décomposition de Dunford établie, le calcul de* $\exp(D)$ *nécessitera, de toute façon, le calcul des valeurs propres.*

Proposition 2.19 – Algorithme pour la décomposition de Dunford

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)^{n_k}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (éventuellement complexes) sont deux à deux distinctes. On pose $P(X) = \dfrac{\chi_A(X)}{PGCD(\chi_A(X), \chi'_A(X))} \in \mathbb{R}[X]$.
La suite de matrices $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par $A_0 = A$ et $A_{i+1} = A_i - P(A_i)\,(P'(A_i))^{-1}$ est bien définie et est constante à partir d'un certain rang, égale à la matrice diagonalisable D apparaissant dans la décomposition de Dunford (Théorème 2.17).

Lemme 2.20

Soient U et N deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement inversibles et nilpotentes telles que $UN = NU$. La matrice $U - N$ est inversible. De plus, si $U \in \mathbb{K}[A]$ et $N \in \mathbb{K}[A]$ (où A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donnée), alors $(U - N)^{-1} \in \mathbb{K}[A]$.

Démonstration. (du Lemme 2.20)
L'idée est d'utiliser la relation formelle $(1 - x)(1 + x + \ldots + x^k) = 1 - x^{k+1}$ avec $x = u^{-1}N$ et k tel que

$N^{k+1} = 0$.
Comme U et N commutent, on a :

$$(I_n - U^{-1}N)(I_n + U^{-1}N + \ldots + (U^{-1}N)^k) = I_n$$

En multipliant à gauche par U et à droite par U^{-1}, on obtient :

$$(U - N)(U^{-1} + U^{-2}N + \ldots + U^{-k-1}N^k) = I_n$$

Ainsi, $U - N$ est bien inversible. De plus, si U et N sont des polynômes en A alors l'inverse de $U - N$ est bien un polynôme en A car il est donné par la formule $U^{-1} + U^{-2}N + \ldots + U^{-k-1}N^k$ et l'on sait, en utilisant le théorème de Cayley Hamilton, que U^{-1} est aussi un polynôme en A. □

Démonstration. (de la Proposition 2.19)

- Montrons que $P \in \mathbb{R}[X]$:
  $\chi_A(X) = \det(A - XI_n) \in \mathbb{R}(X)$. Par conséquent, $\chi_A'(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $PGCD(\chi_A(X), \chi_A'(X)) \in \mathbb{R}[X]$. En effectuant la division euclidienne de $\chi_A(X)$ par le PGCD, on voit que $P(X)$ est bien un polynôme à coefficients réels.
- Comme λ_k est une racine de multiplicité $n_k - 1$ de P' (pour tout $1 \leqslant k \leqslant s$), λ_k est une racine de multiplicité 1 de P. Par ailleurs, P divise χ_A donc il n'a pas de racine différente des λ_k. Par conséquent,
  $$P(X) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)$$
- Montrons que (A_n) est bien définie. Pour cela, on montre par récurrence sur i que A_i est bien définie, qu'il s'agit d'un polynôme en A et que $P'(A_i)$ est une matrice inversible.
  Initialisation : il s'agit de montrer que $P'(A)$ est inversible.
  Comme P est à racines simples, $PGCD(P', P) = 1$ donc on peut écrire l'identité de Bézout $UP' + VP = 1$. En l'appliquant à A, on a $U(A)P'(A) = I_n - V(A)P(A)$.
  Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, en prenant $\alpha = \mathrm{Max}\{n_1, \ldots, n_p\}$, on a $P^\alpha(A) = 0$ et la matrice $N = V(A)P(A)$ est donc nilpotente ($V(A)$ et $P(A)$ commutent). On en déduit, d'après le lemme 2.20 que $U(A)P'(A) = I_n - N$ est inversible (d'inverse $I_n + N + \ldots N^{\alpha-1}$) et que c'est bien un polynôme en A.
  Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang i. Il est clair que A_{i+1} sera bien défini et que A_{i+1} s'exprimera comme un polynôme en i. Il faut ensuite montrer que $P'(A_{i+1})$ est inversible. En écrivant une formule de Taylor pour P',
  $$P'(A_{i+1}) - P'(A_i) = (A_{i+1} - A_i)Q(A_i)$$
  où $Q \in \mathbb{R}[X]$. Or, par définition de A_{i+1}, $(A_{i+1} - A_i) = -P(A_i)\tilde{Q}(A_i)$. Comme précédemment, on en déduit que $(A_{i+1} - A_i)$ est nilpotente et, par suite, que $P'(A_{i+1})$ s'écrit comme la somme d'une matrice inversible ($P'(A_i)$) et d'une matrice nilpotente. Ces matrices commutent car ce sont des polynômes en A. D'après le lemme 2.20, on en déduit que $P'(A_{i+1})$ est inversible.
- Il s'agit de montrer ensuite que (A_i) est constante à partir d'un certain rang. Il suffit pour cela de montrer qu'à partir d'un certain rang, $P(A_i) = 0$. Or, il est possible de montrer que $P(A_i)$ est de la forme :
  $$P(A_i) = P(A)^{2^i} B_i \quad \text{où} \quad B_i \in \mathbb{R}[A], \tag{2.3}$$
  ce qui viendra alors assurer que $P(A_i) = 0$ pour i tel que $2^i \geqslant \alpha$.
  Pour prouver (2.3), on commence par remarquer que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que
  $$Q(X + Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2\tilde{Q}(X, Y). \tag{2.4}$$

Il suffit par exemple de le vérifier pour les monômes en utilisant le binôme de Newton.
On raisonne ensuite par récurrence en supposant, au rang i, que $P(A_i) = P(A)^{2^i} B_i$. (l'initialisation est claire car $P(A_0) = P(A) \times I_n$).
En appliquant le résultat (2.4) à P, on écrit :

$$P(A_{i+1}) = P(A_i + Y) = P(A_i) + YP'(A_i) + Y^2 \tilde{P}(A_i, Y)$$

avec $Y = A_{i+1} - A_i = -P(A_i)\left(P'(A_i)\right)^{-1}$. Or, par définition de Y, $P(A_i) + YP'(A_i) = 0$ donc

$$P(A_{i+1}) = P(A_i)^2 \times \left(P'(A_i)\right)^{-2} \tilde{P}(A_i, Y)$$

et on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence.

- En notant D la limite de (A_i), il reste enfin à montrer que D est la matrice diagonalisable apparaissant dans la décomposition de Dunford. On a en fait déjà montré que $P(D) = 0$. La matrice D est donc annulée par un polynôme scindé à racines simples donc elle est diagonalisable. De plus, pour i suffisamment grand,

$$A - D = A_0 - A_i = \sum_{j=0}^{i-1} (A_j - A_{j+1})$$

D'après les points précédents, les matrices $(A_j - A_{j+1})$ sont toutes des polynômes en A et sont nilpotentes. Elles commutent entre elles et leur somme est donc nilpotente (il suffit d'appliquer le binôme de Newton pour un indice suffisamment grand). Cette somme est par ailleurs un polynôme en A et elle commute avec D. On conclut alors par unicité de la décomposition de Dunford.

□

6 Problèmes affines à coefficients constants

1. Définition du problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme dans l'étude des systèmes différentiels homogènes à coefficients constants, nous nous donnons une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Mais nous supposons également qu'une fonction continue $B : I \to \mathbb{R}^n$ est donnée, ainsi que $t_0 \in I$ et $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Problème : On cherche une fonction $X : t \in I \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \star \quad X \text{ est dérivable sur } I \text{ (ce qui signifie que } \forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ x_i \text{ est dérivable sur } I) \\ \star \quad \forall t \in I,\ X'(t) = AX(t) + B(t) \\ \star \quad X(t_0) = X^{(0)} \end{cases} \tag{2.5}$$

2. Résolution du problème au moyen de l'exponentielle matriciel

Recherchons une condition nécessaire sur X. Nous multiplions l'équation $X'(t) - AX(t) = B(t)$ par $\exp(-tA)$. Comme précédemment, nous remarquons que $Y(t) = \exp(-(t-t_0)A)X(t)$ vérifie $Y'(t) = \exp(-(t-t_0)A)(X'(t) - AX(t))$, donc $Y'(t) = \exp(-(t-t_0)A)B(t)$. On en déduit que

$$Y(t) - Y(t_0) = \int_{t_0}^{t} \exp(-(s-t_0)A)B(s)\mathrm{d}s,$$

et nous retrouvons la formule de Duhamel pour les systèmes linéaires à coefficients constants

$$X(t) = \exp((t-t_0)A)X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)B(s)\mathrm{d}s.$$

On vérifie alors que la fonction $X(t)$ donnée par la formule de Duhamel est solution du problème. de Cauchy 2.5. En résumé, on a la proposition suivante qui signifie que, comme dans le cas des équations scalaires, on peut chercher une solution en appliquant la méthode de variation des constantes.

Proposition 2.21 – Formule de Duhamel

La solution du problème de Cauchy (3.1) est donnée par :

$$X(t) = \exp((t-t_0)A))X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A))B(s)\mathrm{d}s.$$

Exemple. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E): \qquad x''(t) + x(t) = \tan(t)$$

Solution :
En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel équivalent est $X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(t) \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
En appliquant la méthode de variation des constantes on cherche ensuite une solution particulière de (E) : on pose $X(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.
Comme dans la démonstration de la Proposition 3.7, on obtient le système :

$$\begin{aligned}
& C_1'(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + C_2'(t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = B(t) \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} C_1'(t)\cos(t) + C_2'(t)\sin(t) = 0 \\ -C_1'(t)\sin(t) + C_2'(t)\cos(t) = \tan(t) \end{cases} \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} C_1'(t) = -\tan(t)C_2'(t) \\ C_2'(t) = \sin(t) \end{cases} \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} C_1'(t) = -\dfrac{\sin^2(t)}{\cos(t)} \\ C_2(t) = -\cos(t) + cste \end{cases} \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} C_1(t) = \sin(t) - \ln\left(\dfrac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right) + cste \\ C_2(t) = -\cos(t) + cste \end{cases} \qquad \text{(en appliquant les règles de Bioche)}
\end{aligned}$$

Au final, une solution particulière est définie par :

$$x(t) = \cos(t)\left(\sin(t) - \ln\left(\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right)\right) - \cos(t)\sin(t) = \cos(t)\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right).$$

Et l'ensemble des solutions sont les fonctions de la forme :

$$x(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) + \ln\left(\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right).$$

3. Application aux équations scalaires linéaires d'ordre n à coefficients constants

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit b une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $(a_i)_{i=1,\dots,n}$, $(y_i)_{i=0,\dots,n-1}$ des réels donnés. Nous considérons le problème : trouver une fonction n fois dérivable $y : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in I,\ y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = b(t),$$

avec

$$y(t_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}.$$

On pose $X : I \to \mathbb{R}^n$, la fonction dérivable telle que

$$\forall t \in I,\ X'(t) = AX(t) + B(t) \text{ et } X(t_0) = X^{(0)},$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots & & 0 \\ & & & \ldots & & \\ & & & \ldots & & \\ 0 & & & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} X^{(0)} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La formule de Duhamel nous donne l'existence et l'unicité de la fonction X. On a alors la propriété : la solution y du problème d'ordre n existe, est unique et vérifie

$$\forall t \in I,\ X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \ldots \\ \ldots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Notons que l'on montre par récurrence sur n, en développant le déterminant de $A - \lambda \mathrm{Id}_n$ suivant la première colonne, que le polynôme caractéristique de la matrice A vérifie

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \right).$$

Exercices

Exercice 1. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ le système différentiel
$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X(t)$$
avec $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2. On considère les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice A_i, répondre aux questions suivantes :

a. Déterminer les points d'équilibres du système différentiel $X'(t) = A_iX(t)$.

b. Tracer les trajectoires solutions du problème de Cauchy $X'(t) = A_iX(t)$ avec $X(0) = X^{(0)}$ où $X^{(0)}$ prend l'une des neuf valeurs de l'ensemble suivant :
$$X^{(0)} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\},$$

c. Étudier la nature de chaque point d'équilibre. S'agit-il de points d'équilibres stables ? asymptotiquement stables ?

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 12 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ -8 & 12 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 4. Exponentielle d'un bloc de Jordan Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $J_k(\lambda)$ la matrice $k \times k$ définie par
$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
Calculer $\exp(tJ_k(\lambda))$.

Exercice 5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. En déduire l'expression de $X(t)$ solution du problème de Cauchy suivant (où $a, b, c \in \mathbb{R}$) :
$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), & \forall t \in \mathbb{R} \\ X(0) = (a, b, c)^t \end{cases}$$
3. Déterminer la décomposition de Dunford et la décomposition de Jordan de A.
4. Retrouver l'expression de la solution déterminée à la question 2

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Déterminer les solutions (complexes et réelles) de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$ vérifiant $X(0) = (5, 6, 7, 8, 9)^t$.

Exercice 7. Résoudre les systèmes $X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} X(t)$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X(t)$.
.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution du problème de Cauchy $X'(t) = AX(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $X(0) = (1, 1, 1)^t$.

Exercice 9. Déterminer l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle
$$y^{(n)}(t) + y^{(n-1)}(t) + \ldots + y'(t) + y(t) = 0.$$

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Donner toutes les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t) + B(t)$.

Exercice 11. On considère le problème de Cauchy : trouver la fonction dérivable $X = (x_1, x_2)^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + 4x_2(t) + e^t, \end{aligned}$$

avec $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

1. Exprimer $X_0 \in \mathbb{R}^2$, la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et la fonction $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telles que le problème ci-dessus s'écrive $X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $X(0) = X_0$, et rappeler la formule de Duhamel permettant d'exprimer la solution en fonction de A, $(B(s))_{s\in\mathbb{R}}$ et X_0.
2. Calculer $\exp(At)$, pour $t \in \mathbb{R}$.
3. Trouver la fonction X.

Exercice 12. On considère les trois équations différentielles suivantes (où $\lambda, \omega, \omega_0 \in \mathbb{R}_*^+$ sont des pulsations fixées et exprimées en $rad.s^{-1}$)correspondant aux cas d'oscillateurs harmonique, d'oscillateur amorti et d'oscillateur forcé (pour ce dernier, on négligera le terme d'amortissement) où les conditions initiales sont toujours $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$.

- **Oscillateur harmonique :** $x''(t) + \omega^2 n, ; ; x(t) = 0$;
- **Oscillateur amorti :** $x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega^2 x(t) = 0$;
- **Oscillateur forcé :** $x''(t) + \omega^2 x(t) = a\sin(\omega_0 t)$ (où $a \in \mathbb{R}$).

1. Déterminer la solution de l'oscillateur harmonique.
2. (a) Écrire l'équation de l'oscillateur amorti sous la forme d'un système différentiel linéaire en dimension 2.
   (b) Résoudre ce système différentiel (on pourra distinguer les cas selon le signe de $\omega - \lambda$).
3. Déterminer la solution de l'équation de l'oscillateur forcé. On pourra distinguer les cas selon que $\omega = \omega_0$ ou que $\omega \neq \omega_0$.

Exercice 13. Exponentielle de matrice dans le cas $n = 2$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en fonction des coefficients de A tels que $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = 0$.
2. On note $B = A + \frac{\alpha}{2} I_2$. Trouver $\delta \in \mathbb{R}$ en fonction de α et β tel que $B^2 = \delta I_2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\delta > 0$. Calculer $\exp(B)$ en fonction de δ et B, en utilisant que $1 + \frac{\delta}{2!} + \frac{\delta^2}{4!} + \ldots + \frac{\delta^n}{(2n)!} + \ldots = \frac{e^{\sqrt{\delta}} + e^{-\sqrt{\delta}}}{2}$, et que $1 + \frac{\delta}{3!} + \frac{\delta^2}{5!} + \ldots + \frac{\delta^n}{(2n+1)!} + \ldots = \frac{e^{\sqrt{\delta}} - e^{-\sqrt{\delta}}}{2\sqrt{\delta}}$.
4. Dans cette question, on suppose que $\delta = 0$. Calculer $\exp(B)$.
5. Dans cette question, on suppose que $\delta < 0$. Calculer $\exp(B)$ en fonction de δ et B, en utilisant que $1 + \frac{\delta}{2!} + \frac{\delta^2}{4!} + \ldots + \frac{\delta^n}{(2n)!} + \ldots = \cos(\sqrt{-\delta})$, et que $1 + \frac{\delta}{3!} + \frac{\delta^2}{5!} + \ldots + \frac{\delta^n}{(2n+1)!} + \ldots = \frac{\sin(\sqrt{-\delta})}{\sqrt{-\delta}}$.
6. Calculer $\exp(A)$ en fonction de $\exp(B)$.
7. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $A = t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, calculer α, β, B, δ, $\exp(B)$ puis $\exp(A)$.

Exercice 14. Algorithme de Putzer
L'objet de cet exercice est l'étude d'un algorithme permettant de calculer l'exponentielle d'une matrice dès que l'on connaît ses valeurs propres et leur multiplicité.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$ donnée, dont les valeurs propres (répétées selon leur multiplicité) sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.
On définit les matrices $P_k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $k = 0, \ldots, n$ par $P_0 = \mathrm{I}_n$ et $P_k = (A - \lambda_k \mathrm{I}_n)P_{k-1}$ pour $k = 1, \ldots, n$.

1. Justifier que $P_n = 0$?
2. On note $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ avec $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^t$ la solution du système différentiel d'ordre 1 suivant :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = BX(t) \text{ et } X(0) = (1, 0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{C}^n,$$

   avec $B = (b_{k,\ell}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par $b_{k,k} = \lambda_k$ pour $k = 1, \ldots, n$, $b_{k+1,k} = 1$ pour $k = 1, \ldots, n-1$ et tous les autres coefficients de B nuls.
   (a) Que vaut $x_1(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$?
   (b) Donner, pour $k = 2, \ldots, n$ et $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $x_k(t)$ en fonction de λ_k, t, et $x_{k-1}(s)$ pour $s \in \mathbb{R}$.
3. On définit $M : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par

   $$\forall t \in \mathbb{R}, M(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) P_{k-1}.$$

(a) Que vaut $M(0)$?

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, prouver que

$$M'(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t)(\lambda_k P_{k-1} + P_k).$$

(c) En déduire que

$$M'(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) A P_{k-1} = AM(t).$$

(d) En déduire que $M(t) = \exp(At)$.

4. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $a, b, c \in \mathbb{C}$. On prend $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Calculer $(P_i)_{i=1,2}$, et $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. En déduire $\exp(At)$.

Exercice 15. Système différentiel linéaire à coefficients constants d'ordre 2 Soit $n > 0$ un entier donné, soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On cherche $Y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ solution de l'équation différentielle $Y''(t) - A^2 Y(t) = B(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $Y(0) = Y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $Y'(0) = Y^{(1)} \in \mathbb{R}^n$.

1. Pour une solution y de ce problème, on définit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ par $(x_1, \ldots, x_n)^t = AY$ et $(x_{n+1}, \ldots, x_{2n})^t = Y'$. En notant

$$\mu(A) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R}),$$

donner le système différentiel dont est solution $X(t)$, puis donner (sans justification) l'expression de $X(t)$ en fonction de $X(0)$, $\mu(A)$ et $B(s)$ pour $s \in \mathbb{R}$.

2. On note, pour toute matrice réelle $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\cosh(M) = \frac{1}{2}(\exp(M) + \exp(-M))$ et $\sinh(M) = \frac{1}{2}(\exp(M) - \exp(-M))$.

   (a) Calculer $\cosh\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sinh\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Calculer $\exp(\mu(M))$ en fonction de $\cosh(M)$ et $\sinh(M)$.

   (c) Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui commute avec M. Calculer les expressions de $\cosh(M+N)$ et de $\sinh(M+N)$ en fonction de $\cosh(M)$, $\sinh(M)$, $\cosh(N)$ et $\sinh(N)$.

   (d) Prouver que $\cosh(M)^2 - \sinh(M)^2 = I$.

   (e) Calculer la dérivée par rapport à t de $\cosh(Mt)$ et de $\sinh(Mt)$.

3. On suppose maintenant que A est inversible. Donner, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $yY(t)$ en fonction de A, $B(s)$ pour $s \in \mathbb{R}$, y_0 et $\widetilde{y}_0$.

4. On suppose maintenant que $n = 1$ et $A = (1)$ (donc $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$).

   (a) Tracer le portrait de phase du système différentiel $X'(t) = \mu(A)X(t)$.

   (b) On donne $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, défini par $b(t) = \cos(\omega t)$ pour $\omega \in \mathbb{R}$. Donner l'ensemble noté $\mathscr{S}_b$ des solutions y bornées de l'équation différentielle et l'ensemble $\mathscr{S}_{nb}$ des solutions y non bornées.

Chapitre 3

Système différentiel linéaire à coefficients non constants

1 Existence et unicité d'une solution du problème de Cauchy

1. Définition du problème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$. Soit $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Soient $A : I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des fonctions continues.
Problème : On cherche une fonction $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \star \quad X \text{ est dérivable sur } I \\ \star \quad \forall t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ \star \quad X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Contrairement au cas $n = 1$ et au cas où A est constante, on ne va pas chercher à déterminer de solution de manière explicite (ceci n'est pas possible dans le cas général, et **l'exponentielle de matrice ne permet pas de résoudre le problème sans supposer que toutes les matrices $A(t)$ commutent entre elles**.

2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Peano

Nous énonçons un résultat d'existence et d'unicité, que nous appellerons Théorème de Peano (dans la littérature, on le trouve aussi énoncé avec les noms Cauchy-Lipschitz).

Théorème 3.1 – Théorème de Peano (cas linéaire)

Le problème (3.1) admet une unique solution.

Remarque.

- *Comme A et B sont continues, si X est solution du problème* (3.1)*, il est clair que X est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*
- *La solution X est définie sur I tout entier. On ne retrouvera pas cela dans le cadre général des équations non-linéaire (théorème de Cauchy-Lipchitz). On dit que X est une solution globale.*

3. Application aux équations scalaires linéaires d'ordre n à coefficients non constants

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ et b des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et , $(y_i)_{i=0,\dots,n-1}$ des réels donnés. Nous considérons le problème : trouver une fonction n fois dérivable $x : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in I,\ x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) = b(t),$$

avec

$$x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

On pose $X : I \to \mathbb{R}^n$, la fonction dérivable telle que

$$\forall t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \text{ et } X(t_0) = X^{(0)},$$

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots & & 0 \\ & & & \ldots & & \\ & & & \ldots & & \\ 0 & & & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & & \ldots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le théorème de Peano nous donne l'existence et l'unicité de la fonction X. Ainsi, la solution x du problème d'ordre n existe, est unique et vérifie

$$\forall t \in I,\ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \ldots \\ \ldots \\ x^{(n-2)}(t) \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

4. Preuve de la partie existence du théorème de Cauchy-Lipschitz-Peano

On remarque que X est solution de (3.1) si, et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad X(t) = X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\, ds \tag{3.2}$$

En effet,

$$\frac{d}{dt}\left(X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\, ds\right) = A(t)X(t) + B(t)$$

car $t \longmapsto A(t)X(t)B(t)$ est continue.

Rappel : l'intégrale d'une fonction continue $Y : t \in I \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *est définie par* $\int_{t_0}^{t} Y(s)ds = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} y_1(s)ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} y_n(s)ds \end{pmatrix}$

Pour résoudre l'équation (3.2), on va construire une suite de fonctions $X_k : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui converge vers une solution.

Soit $X_0 : t \in I \longmapsto X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
On définit ensuite la suite X_k par récurrence : pour $k \in \mathbb{N}$,

$$X_{k+1} : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & X^{(0)} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} (A(s)X_k(s) + B(s))\, ds \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.
On va maintenant montrer la convergence uniforme de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sur tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset I$ avec $\alpha \leqslant t_0 \leqslant \beta$.

- On commence par majorer $\|X_{k+1}(t) - X_k(t)\|_1$ en montrant par récurrence que pour $t \in [\alpha, \beta]$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\|X_{k+1}(t) - X_k(t)\|_1 \leqslant \left(\|X^{(0)}\|_1 + 1\right) \frac{K^{k+1}|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{3.4}$$

  où K est une constante telle que $\|A(t)\| \leqslant K$ et $\|B(t)\|_1 \leqslant K$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$.
  Initialisation : la propriété est vraie pour $k = 0$ car

$$\|X_1(t) - X_0(t)\|_1 = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)X_0(s) + B(s) ds \right\|_1 \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)X_0(s) + B(s)\|_1 \right| \leqslant K \left(\|X^{(0)}\|_1 + 1\right) |t - t_0|.$$

  Hérédité : Supposons la relation vraie au rang $k - 1$ (pour $k \geqslant 1$).

$$\begin{aligned} \|X_{k+1}(t) - X_k(t)\|_1 &= \left\| \int_{t_0}^{t} A(s) (X_k(s) - X_{k-1}(s))\, ds \right\|_1 \\ &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s) (X_k(s) - X_{k-1}(s))\|_1 ds \right| \\ &\leqslant K \left| \int_{t_0}^{t} \|X_k(s) - X_{k-1}(s)\|_1 ds \right| \\ &\leqslant K \left| \int_{t_0}^{t} \left(\|X^{(0)}\|_1 + 1\right) \frac{K^k |s - t_0|^k}{k!} ds \right| \qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &\leqslant \left(\|X^{(0)}\|_1 + 1\right) \frac{K^{k+1}|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

  car $\left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^k ds \right| = \frac{|t - t_0|^{k+1}}{k+1}$ (pour le vérifier, il suffit de distinguer les cas $t > t_0$ et $t < t_0$).
  La propriété est donc démontrée au rang k.
- L'étape suivante consiste à montrer que la suite $(X_k)_k$ converge uniformément en montrant qu'elle est de Cauchy dans $\mathscr{C}^0([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$ qui est un espace de Banach pour la norme définie par $\|X\|_1 = \sup_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} \|X(t)\|_1$.
  Pour tout $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} \|X_{k+p}(t) - X_k(t)\|_1 &= \left\| \sum_{i=k}^{k+p-1} X_{i+1}(t) - X_i(t) \right\|_1 \\ &\leqslant \sum_{i=k}^{k+p-1} \|X_{i+1}(t) - X_i(t)\|_1 \\ &\leqslant \sum_{i=k}^{k+p-1} \left(\|X^{(0)}\|_1 + 1\right) \frac{K^{i+1}|t - t_0|^{i+1}}{(i+1)!} \qquad \text{(d'après le point précédent : inégalité (3.4))} \\ &\leqslant \left(\|X^{(0)}\|_1 + 1\right) \sum_{i=k}^{k+p-1} \frac{K^{i+1}(\beta - \alpha)^{i+1}}{(i+1)!} \end{aligned}$$

et cette dernière somme tend vers 0 car il s'agit du reste de Cauchy de la série convergente définissant $e^{K(\beta-\alpha)}$.
Ainsi, pour tout $t \in [\alpha,\beta]$, $(X_k(t))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ et donc elle converge. De plus, en passant à la limite (on fait tendre p vers l'infini dans l'inégalité obtenue sur $\|X_{k+p}(t) - X_k(t)\|_1$), on voit que $(X_k)_k$ converge en fait uniformément sur $[\alpha,\beta]$ car l'inégalité était uniforme sur t.

- On note $X : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la limite uniforme de $(X_k)_k$. En passant à la limite dans (3.3), on obtient que X est bien solution de l'équation intégrale souhaitée (équation (3.2) :
$$\forall t \in [\alpha,\beta], \quad X(t) = X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\,ds.$$
Plus précisément, pour $k \geqslant 1$, pour tout $t \in [\alpha,\beta]$:
$$\begin{aligned} X_k(t) &= X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (A(s)X_{k-1}(s) + B(s))ds \\ &= X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))ds + \int_{t_0}^{t} A(s)\left(X_{k-1}(s) - X(s)\right)ds \end{aligned}$$
On a alors, lorsque $k \to +\infty$, $X_k(t) \longrightarrow X(t)$ et :
$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\left(X_{k-1}(s) - X(s)\right)ds \right\| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} K \max_{\alpha \leqslant s \leqslant \beta} \|X_{k-1}(s) - X(s)\|_1 ds \right| \\ &\leqslant |t - t_0| K \max_{\alpha \leqslant s \leqslant \beta} \|X_{k-1}(s) - X(s)\|_1, \end{aligned}$$
et cette dernière quantité tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini ce qui prouve bien que X est solution du système différentiel.
- Jusque là nous avons résolu le système différentiel sur tout segment $[\alpha,\beta] \subset I$. Dans le cas où I n'est pas un segment. On considère une suite de segments $[\alpha_n,\beta_n]$ avec $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\alpha_n,\beta_n]$, (α_n) décroissante et β_n croissante. On note X_{α_n,β_n} la solution construite précédemment sur l'intervalle $[\alpha_n,\beta_n]$.
Il suffit alors de remarquer que pour tous entiers $m \leqslant n$, X_{α_n,β_n} et X_{α_m,β_m} coïncideront sur $[\alpha_m,\beta_m]$ car ce sont les limites uniformes de suites définies de manière identiques sur $[\alpha_m,\beta_m]$ (la limite est toujours unique).
Il suffit donc de définir X de la manière suivante : $X(t) = X_{\alpha_n,\beta_n}(t)$ pour $t \in [\alpha_n,\beta_n]$ (la définition ne dépend pas du n choisi). Ainsi, X est bien définie sur I et elle vérifie l'équation intégrale (3.2) :
$$\forall t \in I, \quad X(t) = X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\,ds$$

Cela prouve au final la partie existence du théorème de Cauchy-Lipschitz-Peano.

5. Preuve de la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz-Peano

Lemme 3.2 – Lemme de Gronwall

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, soit $a : I \to [0,+\infty[$ une fonction continue et soit $b \in \mathbb{R}$. Soit $\psi : I \to [0,+\infty[$ une fonction continue vérifiant
$$\forall t \in I,\ 0 \leqslant \psi(t) \leqslant b + \left| \int_{t_0}^{t} a(s)\psi(s)\mathrm{d}s \right|. \tag{3.5}$$
Alors
$$\forall t \in I,\ 0 \leqslant \psi(t) \leqslant b \exp \left| \int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s \right|. \tag{3.6}$$

Démonstration. Nous supposons d'abord $t \geqslant t_0$. Nous définissons la fonction (nécessairement dérivable) $\varphi(t) = b + \int_{t_0}^t a(s)\psi(s)\mathrm{d}s$. Nous avons donc, d'après (3.5),

$$\varphi'(t) = a(t)\psi(t) \leqslant a(t)\varphi(t).$$

Comme pour les équations différentielles scalaires linéaires à coefficients non constants, on multiplie par $\exp(-\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s)$, et on remarque que la fonction

$$w(t) = \exp\Big(-\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s\Big)\varphi(t)$$

vérifie

$$w(t)' = \exp\Big(-\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s\Big)(\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)) \leqslant 0.$$

En intégrant entre t_0 et $t \geqslant t_0$, nous obtenons, puisque $w(t_0) = \varphi(t_0) = b$,

$$w(t) \leqslant b,$$

donc

$$0 \leqslant \psi(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant b\exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s\Big).$$

Pour $t \leqslant t_0$, nous définissons $\widetilde{I} = \{t_0 - t, t \in I\}$, et pour $t \in \widetilde{I}$, $\widetilde{a}(t) = a(t_0 - t)$ et $\widetilde{\psi}(t) = \psi(t_0 - t)$. On a alors

$$\forall t \in \widetilde{I},\ 0 \leqslant \widetilde{\psi}(t) \leqslant b + \Big|\int_0^t \widetilde{a}(s)\widetilde{\psi}(s)\mathrm{d}s\Big|, \tag{3.7}$$

ce qui permet d'appliquer le résultat obtenu précédemment, et qui conclut la preuve. □

Démonstration. (de la partie unicité du théorème 3.1)
Nous supposons qu'il existe deux solutions X_1 et X_2 du problème (3.1). Soit $Y = X_2 - X_1$. Alors, par différence entre les équations satisfaites par X_1 et X_2, nous trouvons que Y est solution du problème $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \star \quad Y \text{ est dérivable sur } I \\ \star \quad \forall t \in I,\ Y'(t) = A(t)Y(t), \\ \star \quad Y(t_0) = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Nous avons donc

$$Y(t) - Y(t_0) = Y(t) = \int_{t_0}^t A(s)Y(s)\mathrm{d}s.$$

Ceci implique que, pour $t \geqslant t_0$,

$$\|Y(t)\|_1 \leqslant \int_{t_0}^t \|A(s)\|\|Y(s)\|_1\mathrm{d}s,$$

et pour $t \leqslant t_0$,

$$\|Y(t)\|_1 \leqslant \int_t^{t_0} \|A(s)\|\|Y(s)\|_1\mathrm{d}s.$$

Nous vérifions ainsi l'hypothèse (3.5) du lemme de Gronwall 3.2 avec $\psi(t) = \|Y(t)\|_1$, $a(t) = \|A(t)\|$ et $b = 0$. L'inégalité résultante (3.6) permet de conclure que $\psi(t) = \|Y(t)\|_1 = 0$, donc que l'unicité est prouvée.

□

2 Système fondamental de solution et résolvante

1. Problème linéaire et Wronskien

Proposition 3.3 – Dimension de l'espace des solutions

L'ensemble S des fonctions dérivables $X : I \to \mathbb{R}^n$ qui sont solutions du problème homogène $X'(t) = A(t)X(t)$ forme un espace vectoriel de dimension n.

Démonstration. Pour tout $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, le théorème de Peano donne l'existence et l'unicité de la solution du problème $X : I \to \mathbb{R}^n$ fonction dérivable telle que $X'(t) = A(t)X(t)$ pour tout $t \in I$ et $X(t_0) = X^{(0)}$. On considère l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & S \\ X^{(0)} & \longmapsto & X \end{array} \right.$.
Comme dans le cas où A est indépendante du temps, la fonction φ est bijective et linéaire. □

Définition 3.1 – Système fondamental de solutions

On appelle système fondamental de solutions du problème homogène $X'(t) = A(t)X(t)$ toute base de S, l'ensemble des solutions du problème homogène.

Théorème 3.4 – Théorème de Liouville

Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ un système de n solutions du problème homogène $X'(t) = A(t)X(t)$. On définit $W(t) = \det(X_1(t),\ldots,X_n(t))$ (appelé le **Wronskien** du système de solutions). Alors on a les propriétés suivantes :

$$W'(t) = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\Big)W(t) = \mathrm{Tr}(A(t))W(t),$$

donc

$$W(t) = W(t_0)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))\mathrm{d}s\Big).$$

Démonstration. Notons $M(t) = (X_1(t),\ldots,X_n(t)) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Nous notons $\ell_i(t)$, pour $i = 1,\ldots,n$ les lignes de $M(t)$:

$$M(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) & \ldots & X_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(t) \\ \ldots \\ \ell_n(t) \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc $\ell_{i,j}(t) = X_{j,i}(t)$, donc

$$\ell'_{i,j}(t) = X'_{j,i}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)X_{j,k}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\ell_{k,j}(t)(t).$$

On a donc la relation

$$\ell'_i(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\ell_k(t)(t).$$

Donc, comme le déterminant est une forme $n-$linéaire alternée, nous avons

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \ell_1(t) \\ \dots \\ \ell_{i-1}(t) \\ \ell_i'(t) \\ \ell_{i+1}(t) \\ \dots \\ \ell_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \ell_1(t) \\ \dots \\ \ell_{i-1}(t) \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\ell_k(t)(t) \\ \ell_{i+1}(t) \\ \dots \\ \ell_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) \det \begin{pmatrix} \ell_1(t) \\ \dots \\ \ell_{i-1}(t) \\ \ell_k(t)(t) \\ \ell_{i+1}(t) \\ \dots \\ \ell_n(t) \end{pmatrix}.$$

Comme le déterminant d'une matrice ayant deux lignes identiques est nul, dans la somme ci-dessus, la seule matrice $\begin{pmatrix} \ell_1(t) \\ \dots \\ \ell_{i-1}(t) \\ \ell_k(t)(t) \\ \ell_{i+1}(t) \\ \dots \\ \ell_n(t) \end{pmatrix}$ pouvant avoir un déterminant non nul est obtenue pour $k = i$, et elle est alors égale à $M(t)$. On a donc

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) \det M(t) = \operatorname{Tr}(A(t))W(t).$$

□

Corollaire 3.5

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un système de n solutions du problème homogène $X'(t) = A(t)X(t)$ et $W(t)$ le Wronskien associé. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(X_1, \dots, X_n)$ un système fondamental de solutions

(ii) Pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$

(iii) Il existe $t \in I$ tel que $W(t) \neq 0$.

Démonstration. L'isomorphisme de conditions initiales entre l'ensemble des solutions S et $\mathbb{R}^n$ donné par $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & S \\ X^{(0)} & \longmapsto & X \end{array} \right.$ (où X est la solution du problème de Cauchy donné par le théorème de Peano) permet de voir que $(i) \Longrightarrow (iii)$ et le théorème de Liouville montre que $(iii) \Longrightarrow (ii)$. L'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$ est par ailleurs immédiate par définition de la notion de famille libre. □

2. Problème affine

Proposition 3.6 – Espace affine de solutions

L'ensemble des solutions du problème (3.1), pour $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, forme un espace affine de dimension n, c'est à dire que toute solution est la somme d'une solution du problème homogène et d'une solution particulière.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence immédiate de la proposition 3.3 □

Proposition 3.7 – Formule de Duhamel

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un système fondamental de solutions du problème homogène. Alors la solution du problème de Cauchy (3.1) est donnée par :

$$X(t) = M(t)M(t_0)^{-1}X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} M(t)M(s)^{-1}B(s)\mathrm{d}s.$$

où $M(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t)) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit X la solution du problème de Cauchy (3.1). On pose $X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)X_i(t) = M(t)C(t)$, en notant $C(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de composantes $C_i(t)$. On a alors :

$$X'(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)X_i(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i(t)X_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)X_i(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i(t)A(t)X_i(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)X_i(t) + A(t)X(t),$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)X_i(t) = B(t),$$

ce qui s'écrit,

$$M(t)C'(t) = B(t).$$

Donc

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} M(s)^{-1}B(s)\mathrm{d}s = M(t_0)^{-1}X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} M(s)^{-1}B(s)\mathrm{d}s.$$

La solution est donc donnée par

$$X(t) = M(t)M(t_0)^{-1}X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} M(t)M(s)^{-1}B(s)\mathrm{d}s.$$

□

Remarque.

- *On notera que la matrice $M(t)$ n'est pas unique en général. Le déterminant de $M(t)$ qui est le Wronskien est en revanche unique et caractérisé par le Théorème de Liouville.*
- *La formule de Duhamel correspond là encore à l'application de la méthode de la variation des constantes.*
- *Cette méthode s'applique ainsi au cas des équations différentielles scalaires en passant par le système différentiel associé. Dans le cas par exemple d'une équation d'ordre 2, la première ligne du système $M(t)C'(t) = B(t)$ se traduit par l'équation $\sum_{i=1}^{2} C_i'(t)x_i(t) = 0$ où (x_1, x_2) est le système fondamental considéré (voir exemple ci-dessous).*

3. Résolvante

Définition 3.2 – Résolvante

Soient $t_0, s \in I$. Nous appelons résolvante l'application $R : I^2 \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X(t) = R(t,t_0)X^{(0)}$ lorsque $X : I \to \mathbb{R}^n$ est la fonction dérivable sur I telle que $X'(t) = A(t)X(t)$ pour tout $t \in I$ et $X(t_0) = X^{(0)}$.

Nous avons alors les propriétés suivantes.

Proposition 3.8 – Propriétés de la résolvante

1. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un système fondamental de solutions du problème homogène et soit $M(t) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $(X_1(t), \ldots, X_n(t))$. Alors on a
$$R(t_0, s) = M(t)M(t_0)^{-1}.$$
2. La solution du problème (3.1) peut s'exprimer au moyen de la résolvante par la relation suivante (appelée formule de Duhamel) :
$$X(t) = R(t,t_0)X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)\mathrm{d}s.$$
3. On a
$$R(t_0,t_0) = \mathrm{Id}_n \text{ et } R(t_1,t_2)R(t_2,t_3) = R(t_1,t_3).$$
4. La fonction R est différentiable, et ses dérivées partielles sont données par
$$\partial_1 R(t,t_0) = A(t)R(t,t_0) \quad \text{et} \quad \partial_2 R(t,t_0) = -A(t_0)R(t,t_0).$$
5. Pour tout $t_0 \in I$, la fonction $t \longmapsto R(t,t_0)$ est l'unique solution du problème de Cauchy $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $X(t_0) = I_n$ (où $X : I \longmapsto \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

Démonstration. La propriété $R(t,t_0) = M(t)M(t_0)^{-1}$ est la conséquence du calcul effectué dans la preuve de la proposition 3.7. On en déduit donc
$$R(t_0,t_0) = \mathrm{Id}_n \text{ et } R(t_1,t_2)R(t_2,t_3) = R(t_1,t_3).$$
En écrivant
$$X(t) = R(t,t_0)X^{(0)} \text{ donc } X'(t) = A(t)X(t) = \partial_1 R(t,t_0)X^{(0)},$$
on déduit que $\partial_1 R(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$. De plus, la propriété
$$R(t,t_0)R(t_0,t) = \mathrm{Id}_n$$
implique
$$\partial_1 R(t,t_0)R(t_0,t) + R(t,t_0)\partial_2 R(t_0,t) = 0,$$
ce qui implique
$$R(t,t_0)\partial_2 R(t_0,t) = -A(t)R(t,t_0)R(t_0,t) = -A(t),$$
et complète la preuve du résultat. □

Remarque.

- *Dans le cas d'un système différentiel linéaire à coefficients constants ($X'(t) = AX(t)$), on a*
$$R(t,t_0) = \exp(A(t-t_0)) \qquad \textit{et} \qquad M(t) = \exp(At).$$
- *En dehors du cas constant, il est difficile de calculer explicitement la résolvante. Le théorème de Liouville donne néanmoins des informations sur le déterminant de la résolvante.*

4. Résolution dans le cas $n = 2$ si l'on connaît une solution

Nous considérons le problème (3.1) dans le cas $n = 2$. Nous supposons que nous connaissons une solution non nulle du problème homogène $X'(t) = A(t)X(t)$, que nous notons $X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{pmatrix}$.

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ une autre solution du problème homogène. On pose alors

$$W(t) = \det\left(X^{(1)}(t), X(t)\right) = x_1^{(1)}(t)x_2(t) - x_2^{(1)}(t)x_1(t).$$

Le théorème de Liouville (Théorème 3.4) permet de trouver l'expression de $W(t)$ par résolution d'une équation scalaire linéaire homogène. Il est donc possible d'extraire $x_1(t)$ en fonction de $x_2(t)$ ou $x_2(t)$ en fonction de $x_1(t)$, et de reporter l'expression obtenue dans l'une des deux équations du système différentiel. On obtient alors une équation scalaire affine, que l'on peut résoudre.

Une application importante est le cas des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

$$x''(t) + \alpha(t)x'(t) + \beta(t)x(t) = \gamma(t).$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, et l'on est donc amené à résoudre le problème suivant : trouver X telle que

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta(t) & -\alpha(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(t) \end{pmatrix}.$$

Le Wronskien est alors solution de l'équation

$$W'(t) = -\alpha(t)W(t).$$

La méthode évoquée ci-dessus permet donc de trouver une seconde solution dans l'hypothèse où l'on connaît déjà une solution du problème homogène.

Exercices

Exercice 1. Équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants.

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(t^2+1)^2x''(t)-2t(t^2+1)x'(t)+2(t^2-1)x(t)=0.$$

1. Chercher une solution au problème sous la forme d'un polynôme du second degré.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

Exercice 2. On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\forall t>0, \quad 4tx''(t)+2x'(t)-x(t)=0.$$

1. Déterminer les éventuelles solutions qui sont développables en série entière au voisinage de 0.
2. En déduire les solutions sur $]0;+\infty[$.

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle

$$x''(t)-5x'(t)+6x(t)=\frac{e^t}{\mathrm{ch}^2(t)}.$$

Exercice 4. Système fondamental de solutions Soit $A : \mathbb{R}\to\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue, telle que le système homogène $X'(t)=A(t)X(t)$ pour $t\in\mathbb{R}$ admette le système fondamental de solutions noté $X^{(1)}(t),\dots,X^{(n)}(t)$. Soit $B : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$\forall t\in\mathbb{R},\ B(t)=\sum_{i=1}^{n}t^iX^{(i)}(t).$$

Trouver, en fonction du système fondamental $X^{(1)}(t),\dots,X^{(n)}(t)$, l'expression de la fonction $X : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ telle que $X(0)=\sum_{i=1}^{n}X^{(i)}(0)$ et

$$\forall t\in\mathbb{R},\ X'(t)=A(t)X(t)+B(t).$$

Exercice 5. Soient $p,q:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soient f et g deux solutions indépendantes de l'équation différentielle

$$x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=0.$$

1. Montrer que les zéros de f et g sont isolés (c'est-à-dire que si $f(\alpha)=0$, il existe $\varepsilon>0$ tel que f ne s'annule pas sur $]\alpha-\varepsilon;\alpha+\varepsilon[\setminus\{\alpha\}$).
   Indication : on pourra commencer par remarquer que si $f(\alpha)=0$, alors $f'(\alpha)\neq 0$.
2. On considère $\alpha<\beta$ deux zéros consécutifs de f. Montrer qu'il existe un unique réel $\gamma\in]\alpha;\beta[$ tel que $g(\gamma)=0$.

Exercice 6. Soit $(f,g)\in C^0(\mathbb{R})^2$ et soit $A(t)=\begin{pmatrix} f(t) & g(t)\\ -g(t) & f(t)\end{pmatrix}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
On veut trouver toutes les solutions du système différentiel $X'(t)=A(t)X(t)$. On note F (resp. G) une primitive de f (resp. g).

1. On pose $B(t)=\exp\begin{pmatrix} F(t) & G(t)\\ -G(t) & F(t)\end{pmatrix}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Calculer l'expression de $B(t)$ en fonction de $F(t)$ et $G(t)$.
2. Prouver que $B'(t)=A(t)B(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ et en déduire toutes les solutions de $x'(t)=A(t)x(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $a,b : I\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E)\quad x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0.$$

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une base de solutions (x_1,x_2) telle que le Wronskien associé soit également une solution de (E)

(ii) a est dérivable sur I et $a'=b$.

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$tx''(t)+2x'(t)-tx(t)=0.$$

Exercice 9. Soit $a,b:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation suivante admet une unique solution impaire :

$$x'(t)=a(t)x(t)+b(t).$$

Exercice 10. (**Systèmes différentiels antisymétriques.**)

1. **Cas d'une matrice constante.**
   En physique, une particule de charge q, animée d'une vitesse $\overrightarrow{V}$ et placée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit la force $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}$. L'application du principal fondamental de la dynamique permet d'écrire que :
   $$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}.$$
   Par conséquent, $V : t \in \mathbb{R} \longmapsto V(t) \in \mathbb{R}^3$ est solution d'un système différentiel de la forme $V'(t) = AV(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$ où p, q et r sont des réels.
   (a) Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$, où $\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$.
   (b) Résoudre l'équation $V'(t) = AV(t)$ en exprimant les solutions en fonction de ω.
2. **Cas d'une matrice non constante.**
   Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto A(t) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est antisymétrique. Soit $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la résolvante du système $X'(t) = A(t)X(t)$.
   (a) Montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R(t,t_0) \in SO_n(\mathbb{R})$.
   Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto R(t,t_0)^t R(t_0,t)$ est constante.
   (b) En déduire que toute solution de $X'(t) = A(t)X(t)$ est bornée.

Chapitre 4

Systèmes différentiels non-linéaires

1 Quelques exemples de problèmes non-linéaires

1. Problème non globalement lipschitzien

Nous considérons $I = \mathbb{R}$, nous posons $f(x) = x^2$, et nous nous intéressons au problème suivant : trouver une fonction $x : J \to \mathbb{R}$ telle que $J \subset I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, x est dérivable sur J, $x'(t) = f(x(t))$ pour tout $t \in J$ et $x(0) = 1$. La situation explorée ici est celle d'une fonction dont la dérivée n'est pas bornée sur l'ensemble du domaine de définition de la fonction f (nous dirons que la fonction f n'est pas *globalement lipschitzienne*. La solution que nous allons trouver ne sera pas définie sur la totalité de l'intervalle I (nous dirons que la solution n'est pas globale, mais seulement locale).
Par méthode de séparation des variables, nous trouvons

$$\frac{x'(t)}{x(t)^2} = 1.$$

En intégrant la relation précédente entre 0 et t, et en utilisant la relation $x(0) = 1$, nous trouvons

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{1} = t,$$

donc

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Cette solution vérifie bien le problème que l'on veut résoudre sur l'intervalle $J =]-\infty, 1[$. Plusieurs questions se posent :

1. pouvons-nous trouver une solution dont le domaine de définition soit plus grand que $]-\infty, 1[$?
2. la solution que nous trouvons n'est pas bornée : est-ce toujours le cas ?

2. Problème d'unicité

Nous considérons $I = \mathbb{R}$, nous posons $f(x) = \sqrt{|x|}$, et nous nous intéressons au problème suivant : trouver une fonction $x : J \to \mathbb{R}$ telle que $J \subset I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, x est dérivable sur J, $x'(t) = f(x(t))$ pour tout $t \in J$ et $x(0) = 0$. La situation étudiée ici est celle d'une fonction f qui n'est pas *localement lipschitzienne*, et nous allons montrer que dans cette situation nous pouvons trouver une infinité de solutions au problème.

Supposons qu'il existe une solution telle que $x(t) > 0$ pour $t > 0$. Par méthode de séparation des variables, nous trouvons

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1.$$

En intégrant la relation précédente entre 0 et t, et en utilisant la relation $x(0) = 0$, nous trouvons

$$2\sqrt{x(t)} = t,$$

donc

$$x(t) = \frac{t^2}{4}.$$

On se rend alors compte que la fonction x, définie par $x(t) = 0$ si $t < 0$ et $x(t) = \frac{t^2}{4}$ si $t \geq 0$ est une solution du problème.

Mais cela nous montre qu'on peut en trouver beaucoup d'autres ! Par exemple, la fonction x, définie par $x(t) = 0$ si $t < 1$ et $x(t) = \frac{(t-1)^2}{4}$ si $t \geq 1$ est également solution du problème !
Il y ainsi une infinité de solutions. Cette situation sera écartée dans ce chapitre, lorsque nous ferons l'hypothèse que la fonction f est **localement lipschitzienne**, notion qui sera définie par la suite.

2 Systèmes différentiels globalement lipschitziens

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Cela signifie que, en notant, $F(t,X) = \begin{pmatrix} F_1(t,X) \\ \dots \\ F_n(t,X) \end{pmatrix}$, chacune des fonctions $F_i : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pour tout $i = 1, \dots, n$, est continue.
Il est important de bien noter que dans la suite de ce paragraphe, nous utiliserons le fait que le domaine de $F(t,\cdot)$ est tout $\mathbb{R}^n$ (ce sera une différence avec le cadre d'étude suivant, les problèmes "localement lipschitziens"). Nous définissons la notion suivante.

Définition 4.1 – Fonction globalement lipschitzienne

Soit F définie sur $I \times \mathbb{R}^n$ et continue. On dit que F est globalement lipschitzienne si, quel que soit le compact $K \subset I$, il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall t \in K, \quad \forall (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^n, \quad \|F(t,X_1) - F(t,X_2)\| \leqslant M \|X_1 - X_2\|. \tag{4.1}$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposerons que la fonction F est globalement lipschitzienne, c'est le cadre qui est le plus proche de la partie "systèmes différentiels linéaires à coefficients non constants" du chapitre précédent.
Un exemple important de fonctions globalement lipschitziennes est donné par la proposition suivante.

Lemme 4.1 – Fonctions différentiables bornées

Si la fonction $F(t,X) = \begin{pmatrix} F_1(t,X) \\ \dots \\ F_n(t,X) \end{pmatrix}$ est telle que les fonctions $F_i : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pour tout $i = 1, \dots, n$, possèdent des dérivées partielles par rapport aux variables d'espace $\partial_j F_i(t,X)$, $j = 2, \dots, n+1$ continues sur $I \times \mathbb{R}^n$ et bornées sur tout ensemble $K \times \mathbb{R}^n$ où $K \subset I$ est compact, alors F est globalement lipschitzienne.

Démonstration. Nous choisissons la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit K un compact de I, et M un majorant de $|\partial_j F(t,X)|$ pour $(t,X)\in K\times\mathbb{R}^n$. Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \dots \\ x_{1n}\end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ \dots \\ x_{2n}\end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On définit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ par $f(s) = F(t, sX_1 + (1-s)X_2)$. On a alors

$$f'(s) = \begin{pmatrix} \sum_{j=2}^{n+1} (x_{1j} - x_{2j})\partial_j F_1(t, sX_1 + (1-s)X_2) \\ \vdots \\ \sum_{j=2}^{n+1} (x_{1j} - x_{2j})\partial_j F_n(t, sX_1 + (1-s)X_2) \end{pmatrix}.$$

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis,

$$\|f(1) - f(0)\|_1 = \|F(t,X_1) - F(t,X_2)\|_1 \leq nM\|X_1 - X_2\|_1,$$

ce qui conclut la preuve que F est globalement lipschitzienne. $\square$

Nous considérons maintenant le problème suivant (appelé dans l'ensemble du cours "problème de Cauchy") : Pour $t_0 \in I$ et $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, trouver une fonction dérivable $X : J \to \mathbb{R}^n$, telle que

$$X(t_0) = X^{(0)} \text{ et } \forall t \in I,\ X'(t) = F(t, X(t)). \tag{4.2}$$

Théorème 4.2 – Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Soit F une fonction globalement lipschitzienne au sens de la définition 4.1. Alors il existe une et une seule solution au problème (4.2).

Démonstration. La preuve est très proche de celle du théorème de Peano. L'unicité repose sur l'application du lemme de Gronwall, et l'existence sur la convergence d'une suite de fonctions. Les détails sont laissés au lecteur à titre d'exercice (voir exercice 1). $\square$

3 Systèmes différentiels localement lipschitziens

1. Fonctions localement lipschitziennes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue.

Définition 4.2 – Fonction localement lipschitzienne

On dit que F est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument si, pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, X_0) dans $I\times\Omega$ et il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall (t, X_1, X_2) \in I \times \Omega \times \Omega,$$
$$(t, X_1) \in V \text{ et } (t, X_2) \in V \Rightarrow \|F(t,X_1) - F(t,X_2)\| \leqslant M\|X_1 - X_2\| \tag{4.3}$$

Remarque. *À l'avenir, et conformément à la définition 4.2, l'expression « localement Lipschitzienne » signifiera « localement Lipschitzienne par rapport au second argument ».*

Lemme 4.3

Si F est continûment différentiable par rapport à son deuxième argument, F est localement lipschitzienne (par rapport à son deuxième argument).

Démonstration. On considère $\alpha > 0$ tel que $I \cap [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ soit un compact de I (c'est à dire qu'il n'y ait pas de borne ouverte de I dans $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$) et soit $R > 0$ tel que $\overline{B}(X_0, R) \subset \Omega$. Les dérivées partielles $\partial_j F_i(t, X)$ (pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $2 \leqslant j \leqslant n+1$) sont continues donc elles sont bornées sur $(I \cap [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]) \times \overline{B}(X_0, R)$. On conclut alors comme dans la démonstration du Lemme 4.1 afin d'établir qu'il existe une constante L telle que

$$\forall t \in (I \cap]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[), \forall X_1, X_2 \in B(X_0, R), \quad \|F(t, X_1) - F(t, X_2)\| \leqslant M \|X_1 - X_2\|.$$

□

2. Problème de Cauchy et nature des solutions

On considère le problème suivant, appelé **problème de Cauchy**, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application continue et $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$:

On cherche un intervalle ouvert $J \subset I$ (ouvert pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ sur I) contenant t_0, et une fonction dérivable $X \ : \ J \to \mathbb{R}^n$, tels que

$$X(t_0) = X_0 \quad \text{et} \quad \forall t \in J,\ X'(t) = F(t, X(t)). \tag{4.4}$$

Définition 4.3 – Solution locale

Un couple (J, X) (avec J ouvert de I) satisfaisant (4.4) est appelé solution locale du problème de Cauchy (4.4).

Remarque. *On note alors que toute solution locale de ce problème satisfait $X \in C^1(J)$ car X étant dérivable, elle est continue, et donc $t \mapsto F(t, X(t))$ est continue également, et l'on a, par intégration entre t_0 et t,*

$$\forall t \in J,\ X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s)) \mathrm{d}s.$$

Définition 4.4 – Prolongement d'une solution

Soient (J_1, X_1) et (J_2, X_2) deux solutions locales du problème de Cauchy (4.4). On dit que (J_2, X_2) est un prolongement de (J_1, X_1) si $J_1 \subset J_2$ et

$$\forall t \in J_1,\ X_1(t) = X_2(t).$$

Définition 4.5 – Solution maximale et solution globale

Soit (J, X) une solution locale du problème de Cauchy (4.4).
- On dit que (J, X) est une solution maximale si, pour tout prolongement $(\widehat{J}, \widehat{X})$ de (J, X), alors $\widehat{J} = J$.
- On dit que (J, X) est une solution globale si $J = I$.

Remarque. *Il est clair que toute solution globale est une solution maximale.*

Nous avons alors le lemme suivant qui permet d'assurer l'existence d'une solution maximale dès qu'il existe une solution locale. La démonstration nécessite toutefois l'utilisation de l'axiome du choix (ou du lemme de Zorn qui lui est équivalent). On verra toutefois que dans le cas où F est localement Lipschitzienne, l'existence d'une solution maximale peut être démontrée de manière plus élémentaire (voir exercice 3).

Lemme 4.4 – Existence d'une solution maximale prolongeant une solution locale

Soit (J, X) une solution locale du problème de Cauchy (4.4) au sens de la définition 4.3. Alors il existe une solution maximale $(\widetilde{J}, \widetilde{X})$ prolongeant (J, X).

Démonstration. La preuve repose sur le lemme de Zorn. On construit l'ensemble inductif suivant. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des prolongements de (J,X). On ordonne $\mathscr{P}$ par la relation $(\widetilde{J},\widetilde{X}) \preceq (\widehat{J},\widehat{X})$ si $(\widehat{J},\widehat{X})$ est un prolongement de $(\widetilde{J},\widetilde{X})$. Soit $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}$ une chaîne, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathscr{P}$ tels que, pour toute paire $((\widetilde{J},\widetilde{X}),(\widehat{J},\widehat{X})$ d'éléments de $\mathscr{C}$ on a $(\widetilde{J},\widetilde{X}) \preceq (\widehat{J},\widehat{X})$ ou $(\widehat{J},\widehat{X}) \preceq (\widetilde{J},\widetilde{X})$. On définit alors

$$\overline{J} = \bigcup_{(\widetilde{J},\widetilde{X})\in\mathscr{C}} \widetilde{J},$$

et, pour tout $t \in \overline{J}$, on pose

$$\overline{X}(t) = \widetilde{X}(t), \text{ pour tout } (\widetilde{J},\widetilde{X}) \in \mathscr{C} \text{ tel que } t \in \widetilde{J}.$$

On a alors $(\overline{J},\overline{X}) \in \mathscr{P}$, et pour tout $(\widetilde{J},\widetilde{X}) \in \mathscr{C}$, $(\widetilde{J},\widetilde{X}) \preceq (\overline{J},\overline{X})$. On peut donc appliquer le lemme de Zorn, qui énonce l'existence d'un élément maximal dans $\mathscr{P}$. Tout prolongement de cet élément maximal étant dans $\mathscr{P}$, il s'agit bien d'un élément maximal au sens de la définition 4.5. □

3. Théorème de Cauchy-Lipschitz local

On rappelle le problème de Cauchy (4.4) considéré (voir page 64) :
On cherche un intervalle ouvert $J \subset I$ (ouvert pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ sur I) contenant t_0, et une fonction dérivable $X : J \to \mathbb{R}^n$, tels que

$$X(t_0) = X_0 \quad \text{et} \quad \forall t \in J,\ X'(t) = F(t,X(t)).$$

Théorème 4.5 – Cauchy-Lipschitz local

Soit $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et localement lipschitzienne. Soit $(t_0, X^{(0)}) \in I \times \Omega$.

- **Existence :** Il existe au moins une solution locale (J,X) au problème de Cauchy (4.4).
- **Unicité :** Si (J_1,X_1) et (J_2,X_2) sont deux solutions locales du problème de Cauchy (4.4), alors elles coïncident sur l'intervalle ouvert non vide $J_1 \cap J_2$.
  En conséquence, il existe une unique solution maximale au problème (4.5).
- **Régularité :** Si de plus F est de classe $\mathscr{C}^r$, alors toute solution locale est de classe $\mathscr{C}^{r+1}$.

Remarque. *L'hypothèse « F est de classe $\mathscr{C}^r$ » signifie que toutes les dérivées partielles kèmes $\partial^k_{i_1\ldots i_k} F$ pour $k \leqslant r$ par rapport aux arguments $i_1,\ldots i_k$ de la fonction F (où i_m sont des entiers compris entre 0 et n) sont continues.*

Démonstration.

a. Preuve de l'existence d'une solution locale

On va montrer qu'il existe $\tau > 0$ et il existe $X : [t_0 - \tau; t_0 + \tau] \cap I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tels que $(]t_0 - \tau; t_0 + \tau[\cap I, X)$ soit une solution locale du problème de Cauchy :

$$X'(t) = F(t,X(t)) \qquad \text{et} \qquad X(t_0) = X^{(0)} \tag{4.5}$$

On va en fait se restreindre à un voisinage de $(t_0, X^{(0)})$, appelé *cylindre de sécurité*, permettant notamment d'assurer que la solution construite ne sorte pas du domaine $I \times \Omega$. Pour comprendre quelles sont les restrictions à effectuer, on va commencer par donner une idée globale de la preuve (on se place ici dans le cas $t \geqslant t_0$ afin de ne pas avoir à utiliser de valeurs absolues). L'idée est de résoudre l'équation intégrale suivante :

$$X(t) = X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} F(s,X(s))\,\mathrm{d}s$$

En effet, si X est une solution continue de cette équation, alors elle sera $\mathscr{C}^1$ et sera également solution du problème de Cauchy (4.5).
On va définir une suite de fonctions $(X_n)_{n\geqslant 0}$ qui convergera vers une solution locale.
On pose $X_0 \equiv X^{(0)}$ (fonction constante sur un intervalle $J \subset I$) puis, par récurrence,

$$X_{k+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X_k(s))\,\mathrm{d}s$$

Il faut alors prouver essentiellement deux choses :

1. Pour tout $n \geqslant 0$, on veut montrer que X_{k+1} est bien définie. Cela se fait en prouvant que X_k est bien à valeur dans Ω. On va, pour cela, considérer une boule $B(X^{(0)}, R) \subset \Omega$ suffisamment petite afin que, si F est bornée par une constante M, X_k soit à valeur dans Ω. On pourra alors écrire
$$\|X_{k+1}(t) - X^{(0)}\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|F(s, X_k(s))\|\,\mathrm{d}s \right| \leqslant M \times \tau$$
Cela signifie qu'il faut également prendre un intervalle $[t_0\,; t_0 + \tau]$ suffisamment petit pour que $M \times \tau \leqslant R$.
2. On veut ensuite montrer que X_n converge dans l'espace de Banach $\mathscr{C}^0([t_0\,; t_0 + \tau] \cap I, \mathbb{R})$. On va montrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy en utilisant le caractère lipschitzien de F. Il faut donc se restreindre à un voisinage où F est Lipschitzienne.
Il est par ailleurs nécessaire que $\mathscr{C}^0([t_0\,; t_0 + \tau] \cap I, \mathbb{R}^n)$ soit bien un espace de Banach. Cela nécessite de prendre τ suffisamment petit pour que $[t_0\,; t_0 + \tau] \cap I$ soit un segment de $\mathbb{R}$ (cela est toujours possible quel que soit la forme de I).

On va maintenant prouver rigoureusement la partie existence du théorème. On rappelle que l'objectif est de déterminer une fonction continue X qui vérifie, sur un voisinage de t_0, l'équation

$$X(t) = X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\,\mathrm{d}s$$

Conformément à ce que nous avons expliqué plus haut, nous considérons $\tau > 0$ et $R > 0$ suffisamment petits tels que les quatre conditions suivantes soient vérifiées :

1. $B(X^{(0)}, R) \subset \Omega$ et $[t_0 - \tau; t_0 + \tau] \cap I$ est un segment,
2. F est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $[t_0 - \tau\,; t_0 + \tau] \cap I \times \overline{B}(X^{(0)}, R)$ avec la constante $L > 0$
3. F est bornée par M sur $[t_0 - \tau\,; t_0 + \tau] \cap I \times \overline{B}(X^{(0)}, R)$ (on peut toujours le supposer quitte à restreindre R et τ car F est continue donc bornée au voisinage de $(t_0, X^{(0)})$).
4. $M \times \tau \leqslant R$ (on peut toujours le supposer quitte à restreindre à nouveau la valeur de τ).

Comme annoncé, on définit la suite de fonctions continues suivantes :

$$\forall t \in [t_0 - \tau\,; t_0 + \tau] \cap I, \qquad X_{k+1}(t) = X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} F(s, X_k(s))\,\mathrm{d}s \qquad \text{avec} \qquad X_0 \equiv X^{(0)}$$

Montrons par récurrence qu'à chaque étape, X_k est bien définie. Supposons que X_k est bien définie sur $[t_0 - \tau\,; t_0 + \tau] \cap I$ et à valeurs dans $\overline{B}(X^{(0)}, R)$. Montrons qu'il en est de même pour X_{k+1}. Si X_k est à valeurs dans $\overline{B}(X^{(0)}, R)$, X_{k+1} est bien définie comme intégrale d'une fonction continue. De plus, pour tout $t \in [t_0 - \tau\,; t_0 + \tau] \cap I$,

$$\|X_{k+1}(t) - X^{(0)}\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|F(s, X_k(s))\|\,\mathrm{d}s \right| \leqslant M \times \tau \leqslant R$$

Cela prouve que X_{k+1} est bien à valeurs dans $\overline{B}(X^{(0)}, R)$.

Pour conclure la démonstration de l'existence, il suffit de prouver que X_k est de Cauchy. Pour cela, on va montrer par récurrence que

$$\forall t \in [t_0 - \tau\,; t_0 + \tau] \cap I, \qquad \|X_{k+1}(t) - X_k(t)\| \leqslant \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} R$$

La preuve est ici identique à celle du théorème de Cauchy-Lipchitz global. L'initialisation pour $k = 0$ est immédiate. Supposons maintenant l'inégalité vraie au rang $k - 1$ (pour $k \geqslant 1$). Ainsi, pour tout $t \in [t_0 - \tau\,; t_0 + \tau] \cap I$,

$$\begin{aligned}
\|X_{k+1}(t) - X_k(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (F(s, X_k(s)) - F(s, X_{k-1}(s)))\, ds \right\| \\
&\leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} \|X_k(s) - X_{k-1}(s)\|_1 ds \right| \\
&\leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} \frac{L^k (t - t_0)^k}{k!} ds \right| R \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{L^{k+1} |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} R.
\end{aligned}$$

La propriété est donc démontrée au rang k.
En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient ensuite que, pour tout $k \geqslant 1$, $p \geqslant 1$,

$$\sup_{t \in [t_0 - \tau\,; t_0 + \tau] \cap I} \|X_{k+p}(t) - X_k(t)\| \leqslant \sum_{i=n}^{k+p-1} \frac{L^i \tau^i}{i!} R.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ car la série de terme général $\frac{L^i \tau^i}{i!}$ est convergente. Cela prouve donc que X_k est de Cauchy (dans l'espace de Banach $\mathscr{C}^0([t_0 - \tau\,; t_0 + \tau] \cap I, \mathbb{R})$) et elle est donc convergente. Si on note X la limite de (X_k), X est solution de l'équation intégrale considérée (car la convergence de X_k vers X est uniforme sur $[t_0 - \tau\,; t_0 + \tau] \cap I$).

b. Preuve de l'unicité

Soient (J_1, X_1) et (J_2, X_2) deux solutions locales du problème de Cauchy (4.4). On aimerait utiliser le lemme de Gronwall afin d'assurer que X_1 et X_2 coïncident sur $J_1 \cap J_2$. Pour cela, il faudra utiliser le caractère Lipschitzien de F et c'est pourquoi il faut commencer par travailler seulement sur un voisinage de t_0 avant d'en déduire l'égalité sur $J_1 \cap J_2$ tout entier.
On commencera donc par établir le lemme suivant :

Lemme 4.6

Soit $F : I \times \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une application continue et localement Lipschitzienne et soient (J_1, X_1) et (J_2, X_2) deux solutions locales du problème de Cauchy (4.4). Alors il existe $\tau > 0$ tel que $]t_0 - \tau\,; t_0 + \tau[\cap J_1 \cap J_2$ est un intervalle, ouvert de I, non vide, et tel que X_1 et X_2 coïncident sur $]t_0 - \tau\,; t_0 + \tau[\cap J_1 \cap J_2$.

Démonstration. (du lemme 4.6)
Soient (J_1, X_1) et (J_2, X_2) deux solutions locales du problème de Cauchy considéré. $J_1 \cap J_2$ est un intervalle ouvert de I non vide (car J_1 et J_2 contiennent t_0). Ainsi, pour un réel $\tau > 0$ suffisamment petit, $]t_0 - \tau\,; t_0 + \tau[\cap J_1 \cap J_2$ est un intervalle, ouvert de I, non vide.
Par continuité de X_1 et de X_2, et quitte à restreindre la valeur de τ, il existe un réel $R > 0$ tel que :

$$\begin{cases}
F \text{ est Lipschitzienne sur } \big(]t_0 - \tau\,; t_0 + \tau[\cap J_1 \cap J_2\big) \times \overline{B}(X^{(0)}, R) \\
\forall t \in]t_0 - \tau\,; t_0 + \tau[\cap J_1 \cap J_2, \quad X_1(t) \in \overline{B}(X^{(0)}, R) \\
\forall t \in]t_0 - \tau\,; t_0 + \tau[\cap J_1 \cap J_2, \quad X_2(t) \in \overline{B}(X^{(0)}, R)
\end{cases}$$

On note alors $\tilde{J} =]t_0 - \tau; t_0 + \tau[\cap J_1 \cap J_2$ l'intervalle obtenu.
On pose $Y(t) = \|X_1(t) - X_2(t)\|$ pour tout $t \in \tilde{J}$. On aura alors, d'après l'expression intégrale de X_1 et de x_2,

$$\forall t \in \tilde{J}, \qquad X_1(t) - X_2(t) = \int_{t_0}^{t} F(s, X_1(s)) - F(s, X_2(s))\mathrm{d}s$$

et donc, en passant aux normes :

$$Y(t) \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|F(s, X_1(s)) - F(s, X_2(s))\| \mathrm{d}s \right| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} \|X_1(s) - X_2(s)\| \mathrm{d}s \right| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} Y(s)\mathrm{d}s \right|$$

Par une application directe du lemme de Gronwall, on obtient :

$$\forall t \in \tilde{J}, \qquad Y(t) = 0$$

ce qui prouve bien que X_1 et X_2 coïncident sur $]t_0 - \widetilde{\tau}; t_0 + \widetilde{\tau}[\cap J_1 \cap J_2$. □

Démonstration. (de l'unicité dans le théorème 4.5)

Soit $F : I \times \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une application continue et localement Lipschitzienne et soient (J_1, X_1) et (J_2, X_2) deux solutions locales du problème de Cauchy (4.4) et soit $\tau > 0$ le réel donné par le lemme 4.6.
Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in J_1 \cap J_2$ tel que $X_1(t_1) \neq X_2(t_2)$. On pourra supposer par exemple que $t_1 > t_0$ (le cas $t_1 < t_0$ se traite de manière similaire) et on aura donc nécessairement $t_1 \geqslant t_0 + \tau$.
.
On considère alors le réel $t_2 \in]t_0 + \tau; t_1[$, la plus grande valeur telle que $X_1(t) = X_2(t)$ pour tout $t \leqslant t_2$ (on a nécessairement $X_1(t_2) = X_2(t_2)$ par continuité de X_1 et de X_2).
Comme (J_1, X_1) et (J_2, X_2) sont deux solutions du problème de Cauchy $\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) \\ X(t_2) = X_1(t_2) \end{cases}$, on déduit du lemme 4.6 qu'il existe $\tau' > 0$ tel que X_1 et X_2 coïncident sur $]t_2 - \tau'; t_2 + \tau'[\cap J_1 \cap J_2$. Or $]t_2; t_2 + \tau'[\cap J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$ et l'on obtient donc une absurdité par définition de t_2.
Finalement, le lemme 4.4 assure qu'il existe une solution maximale et celle-ci est unique d'après ce que nous venons de démontrer. □

c. Preuve de la régularité

Supposons F de classe $\mathscr{C}^r$. Montrons par récurrence que toutes les dérivées $X^{(k)}$ pour $k = 1, \ldots, r$ s'expriment comme un polynôme en les $F_i(t, X(t))$ et de toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k :

$$X^{(k)}(t) = P_k\big(\{\partial^j_{l_1 \ldots l_j} F_i(t, X(t))\}\big)$$

Cette propriété est vraie au rang $k = 0$. Si nous la supposons vraie au rang $k - 1$, la dérivée d'un polynôme étant un polynôme, le résultat est encore vrai au rang k, par dérivation composée, et en remplaçant les composantes de $X'(t)$ par celles de $F(t, X(t))$

□

Remarque. *Pour mieux comprendre la façon dont sont construits ces polynômes, on pourra par exemple calculer les premières dérivées $X^{(k)}$ dans le cas de la dimension $n = 2$ (voir exercice 4)*

4. Théorème des bouts

L'idée générale du « théorème des bouts » consiste à décrire le comportement de la solution maximale du problème de Cauchy (4.4) (dont l'existence et l'unicité sont assurées par le théorème de Cauchy-Lipchitz local). Pour le dire rapidement, on verra que soit la solution maximale est globale, soit elle « explose » en temps fini (elle ne peut pas rester bornée).

Afin de démontrer ce résultat, nous aurons besoin d'un raffinement du théorème de Cauchy Lipchitz local. Le lemme suivant indique ainsi que sur un petit voisinage de t_0, il est possible de faire vivre les solutions du problème de Cauchy ayant pour condition initiale $X(t_1) = X^{(1)}$ (avec t_1 dans le voisinage de t_0) sur un intervalle dont la longueur τ soit « incompressible » et ne dépende pas du temps t_1 choisi.

Corollaire 4.7 – Raffinement du théorème de Cauchy-Lipchitz local

Soit $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et localement lipchitzienne. Soit $(t_0, X(0)) \in I \times \Omega$.
Il existe $\tau > 0$ et $R > 0$ tel que pour tout $(t_1, X^{(1)}) \in [t_0 - \tau; t_0 + \tau] \cap I \times \overline{B}(X^{(0)}, R)$, il existe $X : [t_1 - \tau; t_1 + \tau] \cap I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tels que $([t_1 - \tau; t_1 + \tau] \cap I, X)$ soit une solution locale du problème de Cauchy :

$$X'(t) = F(t, X(t)) \qquad \text{et} \qquad X(t_1) = X^{(1)} \tag{4.6}$$

Démonstration. Nous allons reprendre la démonstration du Théorème de Cauchy-Lipschitz local afin de prouver ce corollaire. Pour que la solution du problème de Cauchy reste dans le cylindre de sécurité, il va cependant falloir imposer une restriction supplémentaire en prenant τ et R plus petit que dans la démonstration du Théorème 4.5.
Concrètement, on considère $\tau > 0$ et $R > 0$ suffisamment petits pour que les quatre conditions suivantes soient vérifiées :

1. $B(X^{(0)}, 2R) \subset \Omega$ et $[t_0 - 2\tau;\, t_0 + 2\tau] \cap I$ est un segment,
2. F est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $[t_0 - 2\tau; t_0 + 2\tau] \cap I \times \overline{B}\left(X^{(0)}, 2R\right)$ avec la constante $L > 0$.
3. F est bornée (par une constante M) sur $[t_0 - 2\tau; t_0 + 2\tau] \cap I \times \overline{B}\left(X^{(0)}, 2R\right)$ (on peut toujours le supposer quitte à restreindre R et τ car F est continue donc bornée au voisinage de $(t_0, X^{(0)})$).
4. $M \times \tau \leqslant R$ (on peut toujours le supposer quitte à restreindre à nouveau la valeur de τ).

- On considère $t_1 \in [t_0 - \tau; t_0 + \tau] \cap I$ et $X^{(1)} \in \overline{B}(X^{(0)}, R)$. On a alors $[t_1 - \tau; t_1 + \tau] \cap I \subset [t_0 - 2\tau; t_0 + 2\tau] \cap I$. Cela signifie que l'on pourra utiliser le fait que F est bornée par M et qu'elle est L-lipschitzienne sur $[t_1 - \tau; t_1 + \tau] \cap I$.
  On définit la suite de fonctions suivantes :
  $$\forall t \in [t_1 - \tau; t_1 + \tau] \cap I, \qquad X_0(t) = X^{(1)} \qquad \text{et} \qquad X_{n+1}(t) = X^{(1)} + \int_{t_1}^{t} F(s, X_n(s))\,\mathrm{d}s.$$
- On montre par récurrence qu'à chaque étape, X_n est bien définie. Supposons que X_n est bien définie sur $[t_1 - \tau; t_1 + \tau] \cap I$ et à valeurs dans $\overline{B}(X^{(0)}, 2R)$. Montrons qu'il en est de même pour X_{n+1}. Il est immédiat de voir que si X_n est à valeurs dans $\overline{B}(X^{(0)}, 2R)$, X_{n+1} est bien définie. De plus, pour tout $t \in [t_1 - \tau; t_1 + \tau] \cap I$,
  $$\|X_{n+1}(t) - X^{(0)}\| \leqslant \|X_{n+1}(t) - X^{(1)}\| + \|X^{(1)} - X^{(0)}\| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t} \|F(s, X_n(s))\|\,\mathrm{d}s \right| + R \leqslant M \times \tau + R \leqslant 2R$$
  Cela prouve que X_{n+1} est bien à valeurs dans $\overline{B}(X^{(0)}, 2R)$.

- La démonstration du fait que X_n est de Cauchy (dans l'espace de Banach $\mathscr{C}^0([t_1-\tau\,;t_1+\tau]\cap I,\mathbb{R}^n)$) est ensuite en tout point identique à celle du théorème 4.5 : on montre par récurrence que
$$\forall t\in[t_1-\tau\,;t_1+\tau]\cap I,\qquad \|X_{n+1}(t)-X_n(t)\|\leqslant \frac{L^n\,|t-t_1|^n}{n!}R$$
puis en sommant, on obtient que :
$$\sup_{t\in[t_1-\tau;t_1+\tau]\cap I}\|X_{n+p}(t)-X_n(t)\|\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{L^k\tau^k}{k!}R.$$
Cela prouve que la suite (X_n) est de Cauchy et elle converge. Sa limite est une solution sur l'intervalle au problème de Cauchy avec $X(t_1)=X^{(1)}$.

□

Théorème 4.8 – Théorème des bouts

Soit F continue sur $I\times\Omega$ et localement Lipschitzienne, et soit (J,X) la solution locale maximale du problème de Cauchy 4.5. Alors, on a l'alternative suivante :
- Soit $\sup(J)=\sup(I)$,
- Soit $\sup J<\sup I$, et dans ce cas, pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe $\varepsilon>0$ tel que
$$\forall t\in J\cap]T-\varepsilon,T[,\ X(t)\notin K. \tag{4.7}$$

Des conclusions similaires sont obtenues pour les bornes inférieures de I et J.

Remarque.
- *L'ensemble de définition d'une solution maximale est nécessairement un ouvert de I. En effet, si $\sup(J)<\sup(I)$, la solution maximale ne peut pas être définie en $\sup(J)$. Sinon, elle serait nécessairement continue et ne pourrait pas sortir de tout compact au voisinage de $\sup(J)$.*
- *Dans le cas où $\Omega=\mathbb{R}^n$, si $\sup(J)<\sup(I)$, on a nécessairement :*
$$\lim_{t\to T,t<T}\|X(t)\|=+\infty. \tag{4.8}$$
- *Une autre conséquence du théorème des bouts est que si $\Omega=\mathbb{R}^n$ et si F est uniformément bornée sur $I\times\mathbb{R}^n$, alors toute solution maximale de $X'(t)=F(t,X(t))$ est globale. Ce résultat est néanmoins faux si $\Omega\neq\mathbb{R}^n$ (voir exercice).*

Démonstration. Notons $T=\sup J$, et supposons que $T<\sup I$. Soit $K\subset\Omega$ un compact.
Supposons ,par l'absurde que, pour tout
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists t\in J\cap]T-\varepsilon,T[,\ X(t)\in K.$$

Nous choisissons $\varepsilon=\frac{1}{n}$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $t_n\in J\cap\left]T-\frac{1}{n},T\right[$ telle que $X(t_n)\in K$. La suite $(X(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant dans un compact, il existe une sous-suite (que l'on notera encore $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) telle que $(X(t_n))$ soit convergente. On note L sa limite et nous avons alors $(T,L)\in I\times\Omega$.

Soient $\tau>0$ et $R>0$ les réels donnés par le corollaire 4.7 appliqué au problème de Cauchy suivant : $\begin{cases}X'(t)=F(t,X(t))\\ X(T)=L\end{cases}$. Quitte à restreindre la valeur de τ, on peut par ailleurs supposer que $]T-\tau\,;T+\tau[\subset]t_0\,;\sup(I)[$.
Comme $t_n\longrightarrow T$ et $X(t_n)\longrightarrow L$, il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $t_{n_0}\in]T-\tau,T]$ et $X(t_{n_0})\in\overline{B}(L,R)$. Avec le corollaire 4.7 (en prenant $t_1=t_{n_0}$ et $X^{(1)}=X(t_{n_0})$), on en déduit l'existence d'une solution locale $\left(]t_{n_0}\,;t_{n_0}+\tau[,\widehat{X}\right)$ avec $\widehat{X}(t_{n_0})=X(t_{n_0})$.

Le théorème 4.5 permet d'affirmer que la solution maximale du problème de Cauchy avec la donnée $(t_{n_0}, X(t_{n_0}))$ est un prolongement de toute solution locale. Or la solution maximale (J, X) du problème avec donnée $(t_0, X^{(O)})$ est nécessairement la solution maximale du problème de Cauchy avec donnée $(t, X(t))$ pour tout $t \in J$. On devrait donc avoir $]t_{n_0}; t_{n_0} + \tau[\subset J$.
Cela est absurde car $t_{n_0} + \tau > T$.

□

4 Flot d'un système différentiel

1. Théorème du flot

Théorème 4.9 – Flot

Soit $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application localement Lipschitzienne. Soit $(t_0, X^{(0)}) \in I \times \Omega$. Il existe un voisinage $\big([t_0 - \tau, t_0 + \tau] \cap I\big) \times \overline{B}(X^{(0)}, R) \subset I \times \Omega$ de $(t_0, X^{(0)})$ et une unique application continue Φ^{t_0} définie sur ce voisinage (et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) telle que :

$$\begin{cases} t \longmapsto \Phi^{t_0}(t,x) \text{ est } \mathscr{C}^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; \mathbb{R}^n) \quad (\forall x \in \overline{B}(X^{(0)}, R)) \\ \partial_1 \phi^{t_0}(t,x) = F(t, \phi^{t_0}(t,x)) \quad (\forall t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau], \forall x \in \overline{B}(X^0, R)) \\ \Phi^{t_0}(t_0, x) = x \quad (\forall x \in \overline{B}(X^0, R)) \end{cases}$$

Remarque. *En supposant que F est de classe $\mathscr{C}^2$, il est possible (mais plus difficile) de montrer que $\Phi^{(t_0)}$ est alors de classe $\mathscr{C}^1$.*

Définition 4.6

L'application Φ^{t_0} donnée par le théorème 4.9 est appelée le **flot** (local) du système différentiel $X'(t) = F(t, X(t))$ au point t_0.

Par définition du flot, la fonction $t \longmapsto \Phi^{t_0}(t,x)$ (où x est fixé) est donc la solution (locale) de $X'(t) = F(t, X(t))$ vérifiant la condition initiale $X(t_0) = x$.
De plus, d'après le théorème du flot, on sait que cette solution dépend continûment de la condition initiale x.

Démonstration. (du théorème 4.9)
Soit $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application localement Lipschitzienne et soit $(t_0, X^{(0)}) \in I \times \Omega$. On considère les réels $\tau > 0$ et $R > 0$ donnés par le corollaire 4.7. Pour tout $x \in \overline{B}(X^{(0)}, R)$, on considère la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) \\ X(t_0) = x \end{cases}$ définie sur $[t_0 - \tau; t_0 + \tau]$.
On note $\Phi^{t_0}(t,x) \in \overline{B}(X^0, 2R)$ la valeur de cette solution au temps $t \in [t_0 - \tau; t_0 + \tau]$.
Par définition, Φ^{t_0} est $\mathscr{C}^1$ par rapport à t et elle vérifie les conditions voulues :

$$\begin{cases} \partial_1 \phi^{t_0}(t,x) = F(t, \phi^{t_0}(t,x)) \quad (\forall t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau], \forall x \in \overline{B}(X^0, R)) \\ \Phi^{t_0}(t_0, x) = x \quad (\forall x \in \overline{B}(X^0, R)) \end{cases}$$

La continuité découle enfin du lemme suivant où l'on va montrer que Φ^{t_0} est Lipschitzienne par rapport à x (avec une constante de Lipschitz uniforme). En admettant provisoirement le lemme, on voit que pour tout (t_1,x_1) et (t_2,x_2) appartenant à $\big([t_0-\tau,t_0+\tau]\cap I\big)\times\overline{B}(X^{(0)},R)$:

$$\begin{aligned}
\|\Phi^{t_0}(t_1,x_1)-\Phi^{t_0}(t_2,x_2)\| &\leqslant \|\Phi^{t_0}(t_1,x_1)-\Phi^{t_0}(t_1,x_2)\|+\|\Phi^{t_0}(t_1,x_2)-\Phi^{t_0}(t_2,x_2)\| \\
&\leqslant C\|x_1-x_2\|+\left\|\int_{t_1}^{t_2}F(s,\Phi^{t_0}(s,x_2))\mathrm{d}s\right\| \\
&\leqslant C\|x_1-x_2\|+M|t_2-t_1| \\
&\qquad \text{où } M \text{ est un majorant de } F \text{ sur } \big([t_0-\tau,t_0+\tau]\cap I\big)\times\overline{B}(X^{(0)},2R)
\end{aligned}$$

ce qui implique bien la continuité de Φ^{t_0}. □

Lemme 4.10

Avec les notations introduites dans la démonstration du théorème 4.9, il existe $C>0$ telle que pour tous $x_1,x_2\in\overline{B}(X^{(0)},R)$ et pour tout $t\in[t_0-\tau;t_0+\tau]$:

$$\|\Phi^{t_0}(t,x_1)-\Phi^{t_0}(t,x_2)\|\leqslant C\|x_1-x_2\|$$

Démonstration. En utilisant le fait que $\Phi^{t_0}(t,x_i)=x_i+\int_{t_0}^{t}F(s,\Phi^{t_0}(s,x_i))\mathrm{d}s$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\Phi^{t_0}(t,x_1)-\Phi^{t_0}(t,x_2)\| &\leqslant \|x_1-x_2\|+\left|\int_{t_0}^{t}\|F(s,\Phi(s,x_1))-F(s,\Phi(s,x_2))\|\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \|x_1-x_2\|+L\left|\int_{t_0}^{t}\|Phi^{t_0}(s,x_1)-\Phi^{t_0}(s,x_2)\|\mathrm{d}s\right| \\
&\qquad \text{(où } L \text{ est la constante de Lipschitz associée à } F\text{)}
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\|\Phi^{t_0}(s,x_1)-\Phi^{t_0}(s,x_2)\|\leqslant e^{\tau L}\|x_1-x_2\|.$$

□

Exemple.

- Dans le cas d'un système différentiel linéaire $X'(t)=A(t)X(t)$, en notant R la résolvante du système, on a $\Phi^{t_0}(t,x)=R(t,t_0)x$.

- Dans le cas particulier d'un système différentiel à coefficients $X'(t)=AX(t)$, on a plus précisément, $\Phi^{t_0}(t,x)=e^{(t-t_0)A}x$.

2. Dépendance par rapport aux paramètres

On va déduire du théorème du flot le fait que si un système différentiel dépend d'un ou plusieurs paramètres, les solutions seront continues par rapport à ces paramètres. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 4.11

oit $F:I\times\Omega\times\Lambda\longrightarrow\mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ où $I\subset\mathbb{R}$ est un intervalle, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ est un ouvert et $\Lambda\subset R^k$ est un ouvert.
Les solutions du système différentiel à paramètre

$$X'(t)=F(t,X(t),\lambda)$$

sont continues par rapport à λ.

Démonstration. On considère le système différentiel augmenté

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t), \lambda(t)) \\ \lambda'(t) = 0 \end{cases}$$

où l'inconnue de ce système est la fonction $t \longmapsto (X(t), \lambda(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.
Pour $t_0 \in I$, on note Φ^{t_0} le flot associé à ce système.
Pour $(x, \lambda) \in \Omega \times \Lambda$, on pose $(X(t), \lambda(t)) = \Phi^{t_0}(t, x, v)$.
Par définition du flot, cela signifie que X est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t), \lambda) \\ X(t_0) = x \end{cases}$$

De plus, X continue par rapport à (x, λ) et en particulier par rapport à λ. $\square$

Exercices

Exercice 1. En vous inspirant de la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz-Peano (cas des systèmes différentiels linéaires), prouver le théorème de Cauchy-Lipschitz global.

Exercice 2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(t,x) = \sin(x). \tag{4.9}$$

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Prouver qu'il existe et une seule fonction $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ solution du problème $x(0) = x_0$ et $x'(t) = f(t,x(t))$.
2. Trouver toutes les solutions constantes de ce problème.
3. On suppose que $x_0 \in]0,\pi[$.
   (a) Prouver que $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) \in]0,\pi[$.
   (b) Prouver que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \pi$ et que $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 0$.

Exercice 3. Soit $F : I\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et localement Lipschitzienne et soit $(t_0, X(0)) \in I\times\Omega$. On s'intéresse au problème de Cauchy $(\star)$:

$$\begin{cases} X'(t) = F(t,X(t)) \\ X(t_0) = X(0) \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz local, si (J_1,X_1) et (J_2,X_2) sont deux solutions locales du problème de Cauchy $(\star)$, alors X_1 et X_2 coïncident sur $J_1\cap J_2$. En déduire, sans utiliser l'axiome du choix, qu'il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy $(\star)$.

Exercice 4. Soit $F : I\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^3$ et soit $X^{\cdot}I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une solution de classe $\mathscr{C}^3$ de $X'(t) = F(t,X(t))$ sur I.
Pour $k \in \{1,2,3,4\}$, calculer $X(k)(t)$ en fonction des $F_i(t,X(t))$ pour $i = 1,2$) et de leurs dérivées partielles successives.

Exercice 5. Soit f la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,\ f(t,x) = -\frac{1}{x}. \tag{4.10}$$

1. Prouver que f est continue et localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.
2. Soit $x_0 > 0$ et soit $x(t) : J \to \mathbb{R}$ solution maximale du problème $x(0) = x_0$ et $x'(t) = f(t,x(t))$. Donner l'expression de J.
3. Donner les limites de la solution maximale aux bornes de son intervalle de définition et vérifier qu'elles sont en accord avec le « théorème des bouts ».

Exercice 6. Soit f la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(t,x) = -x^2. \tag{4.11}$$

1. Prouver que f est continue et localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $x(t) : J \to \mathbb{R}$ solution maximale du problème $x(0) = x_0$ et $x'(t) = f(t,x(t))$. Donner l'intervalle de temps J tel que x soit la solution maximale du problème dans le cas $x_0 = 0$.
3. Prouver que si $x_0 \neq 0$, la fonction x ne s'annule pas sur J. Après l'avoir calculée, donner les limites de la solution maximale aux bornes de son intervalle de définition et vérifier qu'elles sont en accord avec le "théorème des bouts".

Exercice 7. Soit f la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(t,x) = t\,x^2. \tag{4.12}$$

1. Soit $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$. Prouver qu'il existe une et une seule solution maximale $x \in C^\infty(J)$ (où J est un intervalle ouvert tel que $t_0 \in J$) solution du problème $x(t_0) = x_0$ et $x'(t) = f(t,x(t))$.
2. On suppose que $x_0 = 0$. Quelle est la solution maximale du problème ?
3. On suppose que $x_0 \neq 0$. Prouver que x est soit strictement positive, soit strictement négative sur J et donner explicitement l'expression de J et de $x(t)$ en fonction de t_0 et x_0.

Exercice 8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(t,x) = t^2 + x^2. \tag{4.13}$$

1. Prouver qu'il existe une et une seule solution maximale $x \in C^\infty(J)$ avec J intervalle ouvert tel que $0 \in J$, solution du problème $x(0) = 0$ et $x'(t) = f(t, x(t))$.
2. Prouver que x est impaire (donc que 0 est centre de symétrie de J), et etudier sa monotonie et sa concavité.
3. Prouver que J est borné et étudier les limites de la fonction x aux bornes de J.

Exercice 9. Théorème de Cauchy-Lipschitz Soit $F : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument telle qu'il existe deux fonctions continues a, b de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ avec

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ \forall X \in \mathbb{R}^n,$$
$$2\sum_{i=1}^{n} F_i(t,X)X_i \leqslant a(t)\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b(t).$$

Soit $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné, et soit (J,X), avec $0 \in J \subset [0,+\infty[$, la solution maximale du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} &\forall t \in J,\ X'(t) = F(t, X(t)),\\ &X(0) = X^{(0)}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

1. On pose $N(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)^2$ pour tout $t \in J$. Prouver que
$$\forall t \in J,\ N'(t) \leqslant a(t)N(t) + b(t).$$
2. En déduire l'existence d'une fonction continue $\rho : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que
$$\forall t \in J,\ N(t) \leqslant \rho(t).$$
3. En déduire que $J = [0,+\infty[$, c'est à dire que la solution maximale du problème de Cauchy (4.14) est globale.
4. Donner, pour n de votre choix, un exemple de fonction $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui est continue et localement lipschitzienne par rapport à son 2e argument mais qui ne vérifie pas l'hypothèse de l'exercice.
5. Montrer que les hypothèses de l'exercice sont satisfaites dans le cas particulier où $f(t,x) = A(t)x + B(t)$, et $A : [0,+\infty[\to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $B : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions continues.

Exercice 10. On pose $\Omega = \mathbb{R}^3$ et $f : \Omega \to \Omega$ est la fonction définie par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ f(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3)\\ f_2(x_1,x_2,x_3)\\ f_3(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2\\ x_1 - x_2 - x_1x_3\\ x_1x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse aux propriétés des solutions locales (J,X) du système différentiel autonome d'ordre 3 suivant :

$$X(0) = X^{(0)} \text{ et } \forall t \in J,\ X'(t) = f(X(t)), \tag{4.15}$$

où l'on étudie le problème sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, $X : J \to \Omega$, $X^{(0)} = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix} \in \Omega$.

1. Prouver l'existence et l'unicité de la solution maximale (J,X).
2. Prouver par récurrence que les dérivées n-ièmes de X vérifient $X_i^{(n)}(t) = f_{i,n}(X(t))$ pour $i = 1,2,3$, où les composantes de la fonction $f_{i,n} : \Omega \to \Omega$ sont des polynômes des composantes x_1, x_2, x_3 de $X \in \Omega$ (on notera $\partial_j f_{i,n}$ le polynôme de x_1, x_2, x_3 obtenu par dérivation partielle de la fonction $f_{i,n}$ par rapport à x_j), ce qui prouve que $X \in C^\infty(J)$.
3. On pose $H : J \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)$. Remarquer que $H'(t)$ est une fonction de $H(t)$, et en déduire $H(t)$ pour tout $t \in J$ en fonction de a, b, c et t.
4. Prouver que $J = \mathbb{R}$.
5. Prouver que $\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = 0$, pour $i = 1,2,3$.

Exercice 11. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ lipschitziennes en tant que fonctions de $\mathbb{R}^2$. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$

1. Justifier que f et g sont globalement lipschitziennes par rapport à leur second argument. Que peut-on en déduire quant aux problèmes de Cauchy suivants ?
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t))\\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dans la suite de l'exercice, on note x et y les solutions maximales de ces problèmes de Cauchy. '

2. On suppose que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(t,x) < g(t,x). \quad (4.16)$$

Prouver qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $t \in]t_0, t_0 + a[$, $y(t) > x(t)$ et pour tout $t \in]t_0 - a, t_0[$, $y(t) < x(t)$.

3. On suppose (4.16) vérifiée. Montrer que pour tout $t > t_0$, $x(t) < y(t)$. Étudier le cas $t < t_0$.

4. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on pose $g_\varepsilon(t,x) = g(t,x) + \varepsilon$, et on note $y_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ la fonction telle que $y_\varepsilon(t_0) = x_0$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t)).$$

Justifier de l'existence et de l'unicité de y_ε, puis majorer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|y(t) - y_\varepsilon(t)|$ en fonction de t, t_0, ε et M, constante de Lipschitz de la fonction g. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_\varepsilon(t)$ tend vers $y(t)$ quand ε tend vers 0.

5. On suppose que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(t,x) \leqslant g(t,x). \quad (4.17)$$

En utilisant ce qui a été fait précédemment, montrer que pour tout $t > t_0$, $y(t) \geqslant x(t)$. Qu'en est-il pour $t < t_0$?

Exercice 12. Sur-solution et sous-solution

Soit $I = [0, +\infty[$ et $f\ :\ I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction **globalement** lipschitzienne de constante L.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $x \in C^1(I)$ la solution du problème

$$\forall t \in I,\ x'(t) = f(t, x(t)) \text{ et } x(0) = x_0. \quad (4.18)$$

1. On suppose dans cette question qu'il existe une fonction $\overline{x} \in C^1(I)$ telle que

$$x_0 < \overline{x}(0). \quad (4.19)$$

et

$$\forall t \in I,\ \overline{x}'(t) > f(t, \overline{x}(t)). \quad (4.20)$$

Prouver que

$$\forall t \in I,\ x(t) < \overline{x}(t). \quad (4.21)$$

2. On suppose dans cette question qu'il existe une fonction $\underline{x} \in C^1(I)$ telle que

$$\underline{x}(0) < x_0. \quad (4.22)$$

et

$$\forall t \in I,\ \underline{x}'(t) < f(t, \underline{x}(t)). \quad (4.23)$$

En remarquant que $-x'(t) = -f(t, x(t))$, $-\underline{x}'(t) > -f(t, \underline{x}(t))$ et $-x_0 < -\underline{x}(0)$, définir $(\widetilde{x}, \widetilde{\overline{x}}, \widetilde{f})$ en fonction de $x, \underline{x}, f$ permettant de déduire de la question 1 que

$$\forall t \in I,\ \underline{x}(t) < x(t). \quad (4.24)$$

3. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$. On note $x_\varepsilon \in C^1(I)$ la solution du problème

$$\forall t \in I,\ x'_\varepsilon(t) = f(t, x_\varepsilon(t)) + \varepsilon \text{ et } x_\varepsilon(0) = x_0 + \varepsilon. \quad (4.25)$$

Après avoir brièvement justifié l'existence et l'unicité de x_ε, prouver que

$$\forall t \in I,\ |x_\varepsilon(t) - x(t)| \leqslant |\varepsilon| \Big(\frac{e^{Lt} - 1}{L} + e^{Lt} \Big). \quad (4.26)$$

4. On suppose dans cette question qu'il existe une fonction $\overline{x} \in C^1(I)$ telle que

$$x_0 \leqslant \overline{x}(0). \quad (4.27)$$

et

$$\forall t \in I,\ \overline{x}'(t) \geq f(t, \overline{x}(t)). \quad (4.28)$$

On appelle une telle fonction $\overline{x}$ une sur-solution. Prouver, à l'aide de la question 1 et de la question précédente (en choisissant $\varepsilon < 0$), que

$$\forall t \in I,\ x(t) \leqslant \overline{x}(t). \quad (4.29)$$

(On peut pareillement étendre le résultat de la question 2 aux inégalités larges pour la fonction $\underline{x}$, appelée alors sous-solution.)

Exercice 13.

1. On considère l'équation différentielle

$$(E_0) : \quad x'' + x^3 = 0.$$

où x désigne une fonction à valeurs réelles deux fois dérivables.

(a) Montrer que l'équation (E_0) est équivalente à un système différentiel $X'(t) = F(X(t))$ où F est une application que l'on précisera.

(b) Pour (t_0, x_0) fixé, justifier que l'équation (E_0) admet une unique solution maximale (J, x) vérifiant $x(t_0) = x_0$.

(c) Montrer que pour une telle solution maximale, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in J, \quad \frac{x'(t)^2}{2} + \frac{x(t)^4}{4} = C.$$

(d) En déduire que $J = \mathbb{R}$.

2. On considère maintenant l'équation différentielle suivante

$$(E_\lambda) : x'' + \lambda x' + x^3 = 0.$$

(a) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, justifier qu'il existe une unique solution maximale (J_λ, x_λ).

(b) Justifier que lorsque λ tend vers 0, la solution x_λ tend vers x dans un sens que l'on précisera.

Exercice 14. Pendule pesant pour les petits angles

Soit $x_0 \in]0, \pi[$. On considère le problème de Cauchy du pendule pesant :

$$(P_1) \quad x''(t) + \sin(x(t)) = 0, \quad x(0) = x_0, x'(0) = 0$$

et le problème linéarisé (pour les petits angles) :

$$(P_2) \quad y''(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = x_0, y'(0) = 0$$

1. Montrer que (P_1) est équivalent à la résolution d'un problème différentiel non linéaire $X'(t) = F(X(t))$ et $X(0) = X^{(0)}$ où F et $X^{(0)}$ sont à préciser.
2. Montrer que (P_1) et (P_2) admettent une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.
3. On note x la solution de (P_1) et y la solution de (P_2).

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|x(t)| \leqslant x_0.$$

(b) Montrer que $Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) - y(t) \\ x'(t) - y'(t) \end{pmatrix}$ est solution d'un système différentiel affine.

(c) Majorer $\|Z(t)\|_2$ en fonction de x_0 et t et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \frac{x_0^3}{6}|t|.$$

Indication : on pourra utiliser l'inégalité suivante pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x - \sin(x)| \leqslant \frac{|x|^3}{6}.$$

Chapitre 5

Problèmes autonomes

Définition 5.1 – Problème autonome

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitzienne. Soit $(t_0, X^{(0)}) \in \mathbb{R} \times \Omega$. On dit que le problème de Cauchy suivant est un problème **autonome** :
Déterminer $J \subset \mathbb{R}$ et une fonction dérivable $X \ : \ J \to \Omega$, telle que

$$X(t_0) = X^{(0)} \text{ et } \forall t \in J,\ X'(t) = F(X(t)) \tag{5.1}$$

Remarque. *Moralement, un problème est autonome lorsque F ne dépend pas explicitement du temps. Dans tout le chapitre, on considérera donc que les problèmes autonomes considérés sont résolus sur* $I = \mathbb{R}$.

1 Trajectoires et portrait de phase

1. Définitions et premières propriétés

Dans toute cette partie, on considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitzienne.

Définition 5.2 – Trajectoire

On appelle **trajectoire** du problème autonome (5.1) un ensemble $T \subset \Omega$ tel qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X^{(0)} \in \Omega$ tels que

$$T = \{X(t), t \in J\}, \tag{5.2}$$

où (J, X) est l'unique solution maximale du problème de Cauchy (5.1).

Le lemme qui suit n'est pas vrai pour des problèmes non autonomes. Il permet ainsi de saisir la grande différence qui existe entre problème « autonomes » et « non autonomes ». Pour ainsi dire, tout ce que nous allons faire dans ce chapitre, définir en particulier la notion de portrait de phase, ne serait pas possible sans ce lemme.

Lemme 5.1 – Les trajectoires ne se coupent pas

Soient T_1 et T_2 deux trajectoires du problème de Cauchy (5.1) telles que $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$. Alors $T_1 = T_2$.

Démonstration. Supposons que $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ et considérons $X^{(1)} \in T_1 \cap T_2$. Il existe (J_1, X_1) solution maximale de (5.1) telle que $T_1 = \{X_1(t), t \in J_1\}$, et (J_2, X_2) solution de (5.1) telle que $T_2 = \{X_2(t), t \in J_2\}$. Il existe donc $t_1 \in J$ tel que $X(t_1) = X^{(1)}$ et $t_2 \in J_2$ tel que $X_2(t_2) = X^{(1)}$.
On pose alors $\widehat{J} = \{t - t_2 + t_1, t \in J_1\}$ (on a alors $t \in \widehat{J}$ si, et seulement si, $t - t_1 + t_2 \in J_2$).
De plus, on pose, pour $t \in \widehat{J}$, $\widehat{X}(t) = X_2(t - t_1 + t_2)$.
Ainsi, (J_1, X_1) et $(\widehat{J}, \widehat{X})$ sont deux solutions de (5.1) avec la condition initiale $X(t_1) = X^{(1)}$.
Par le théorème 4.5, ces deux fonctions sont donc identiques. On a donc $J_1 = \widehat{J}$. Par suite, les trajectoires T_1 et $\widehat{T}$ associées à ces deux solutions sont identiques.
Au final, on a bien

$$T_2 = \{X(t),\, t \in J_2\} = \{X(t),\, t \in \widehat{J}\} = \widehat{T} = T_1.$$

□

Définition 5.3 – Portrait de phase

On appelle portrait de phase l'ensemble des trajectoires du système différentiel $X'(t) = F(X(t))$.

Remarque.
- *D'après le Lemme 5.1, le portrait de phase d'un système autonome est une partition de Ω.*
- *D'après la démonstration du Lemme 5.1, si deux solutions maximales (J_1, X_1) et (J_2, X_2) ont leur trajectoire qui se coupent, alors il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $J_2 = J_1 + T$ et tel que pour tout $t \in J_1$, $X_1(t) = X_2(t + T)$. Par conséquent, lorsqu'un système est autonome, on pourra toujours se ramener au cas où la condition initiale du problème de Cauchy considéré est donnée pour $t_0 = 0$.*

2. Solution globale avec fonction de Liapunov

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ou Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que F est continue, localement lipschitzienne en chacun de ses points.
On s'intéresse au problème de Cauchy suivant : trouver, pour $X^{(0)} \in \Omega$ donné, le couple (J, X) avec $J = [0, T[$ ou $[0, +\infty[$ la solution maximale du problème de Cauchy autonome

$$X'(t) = F(X(t)) \text{ et } X(0) = X^{(0)}, \tag{5.3}$$

Dans la continuité de ce qui a été fait dans les exercices du chapitre précédent, nous allons démontrer un résultat permettant d'assurer que la solution maximale soit une solution globale.

Théorème 5.2 – Solution globale avec existence d'une fonction de Liapunov

On suppose qu'il existe une fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que
- $\forall A \in \mathbb{R}, \exists K$ compact inclus dans Ω, $\forall X \in \Omega \setminus K$, $V(X) \geqslant A$,
- il existe des réels $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$ tels que $\nabla V(X) \cdot F(X) \leqslant \alpha V(X) + \beta$ pour tout $X \in \Omega$.

Alors le problème de Cauchy (5.3) possède une solution globale.

Remarque. *Une fonction V vérifiant les hypothèses du théorème 5.2 est appelée fonction de Liapunov.*

Exemple. La fonction $F(X) = AX$, où A est une matrice carrée, satisfait ces hypothèses avec $V(X) = |X|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Démonstration. La fonction réelle $f(t) = V(X(t))$ est de classe $C^1(J)$ et vérifie pour tout $t \in J$ la relation $f'(t) = \nabla V(X(t)) \cdot X'(t) = \nabla V(X(t)) \cdot F(X(t)) \leqslant \alpha f(t) + \beta$. Par la technique de la preuve du lemme de Gronwall, on obtient que $f(t) \leqslant g(t)$ avec $g(t) = (f(0) + \frac{\beta}{\alpha})e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}$ si $\alpha > 0$, et $g(t) = f(0) + \beta t$ si $\alpha = 0$. Donc si J est majoré, donc $J = [0, T[$, on obtient une contradiction : en effet, si K est un compact tel que pour $X \notin K$, $V(X) > g(T)$, le théorème des bouts implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $t \in]T - \varepsilon, T[$, $X(t) \notin K$ donc $f(t) > g(T) > g(t)$. □

2 Points d'équilibres : définitions et premiers résultats

Définition 5.4 – Point d'équilibre

On dit que $\overline{X} \in \Omega$ est un point d'équilibre du système différentiel $X'(t) = F(X(t))$ si $F(\overline{X}) = 0$.

Définition 5.5 – Point d'équilibre stable

On appelle point d'équilibre stable du système différentiel $X'(t) = F(X(t))$ tout point d'équilibre $X^{(1)} \in \Omega$ tel que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que, pour tout $X^{(0)} \in B(X^{(1)}, \delta) \subset \Omega$, la solution maximale (J, X) du problème $X'(t) = F(X(t))$, avec $X(0) = X^{(0)}$, vérifie $[0, +\infty[\subset J$ et $X(t) \in B(X^{(1)}, \varepsilon) \subset \Omega$ pour tout $t \geqslant 0$.

Exemple. Si $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X$ avec $X \in \mathbb{R}^2$, les points $(x, 0)^t$ sont des points d'équilibre stables.

Définition 5.6 – Point d'équilibre attractif

On appelle point d'équilibre attractif du système différentiel $X'(t) = F(X(t))$ tout point d'équilibre $X^{(1)} \in \Omega$ tel qu'il existe $\mu > 0$ tel que, pour tout $X^{(0)} \in B(X^{(1)}, \mu) \subset \Omega$, la solution maximale (J, X) du problème $X'(t) = F(X(t))$, avec $X(0) = X^{(0)}$, vérifie $[0, +\infty[\subset J$ et

$$\lim_{t \to \infty} X(t) = X^{(1)}.$$

Définition 5.7 – Point d'équilibre asymptotiquement stable

On appelle point d'équilibre asymptotiquement stable du système différentiel $X'(t) = F(X(t))$, $t \in \mathbb{R}$, tout point d'équilibre $X^{(1)}$ stable et attractif.

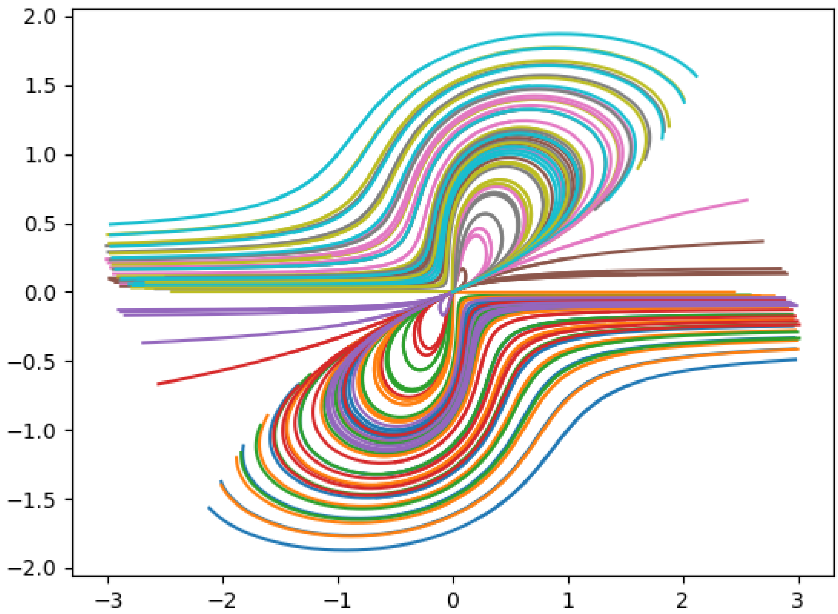
Remarque. *Par rapport aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, la les définitions précédentes sont plus générales et nécessitent l'ajout de l'hypothèse « la solution maximale existe sur* $[0; +\infty[$. *Cela est en fait automatiquement vérifié pour les systèmes différentiels linéaires mais, dans le cas général, parler de la limite lorsque* $t \to +\infty$ *n'aurait par exemple aucun sens si* J *était un intervalle borné.*

Il est à noter qu'un point d'équilibre peut être attractif sans être stable, comme illustré par l'exemple suivant.

Exemple. Dans le cas $n = 2$, nous considérons $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F((0,0)^t) = (0,0)^t$, et, pour $X = (x_1, x_2)^t \neq (0,0)^t$,

$$F(X) = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)\left(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2\right)} \\ \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)\left(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2\right)} \end{pmatrix}.$$

La fonction F est globalement lipschitzienne (continûment différentiable en dehors de 0, dérivées partielles bornées, et localement lipschitzienne en 0). Le portrait de phase est alors représenté dans la figure suivante :



Proposition 5.3

Soit F définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipchitzienne. Soit (J,X) une solution maximale non constante du problème de Cauchy (5.1) telle que J est non majoré. Si X converge vers $l \in \Omega$ (lorsque $t \to +\infty$), sa limite est un point d'équilibre (donc $F(l) = 0$).

Démonstration. Si X_0 est un point d'équilibre pour le problème de Cauchy (5.1), $\{X_0\}$ est une trajectoire. Par conséquent, d'après le lemme 5.1, il s'agit de la seule trajectoire contenant X_0 et la solution correspondante est une solution constante.
Par ailleurs, supposons que (J,X) est une solution maximale non constante du problème de Cauchy (5.1) avec J non majoré et convergente vers $l \in \mathbb{R}^n$. En intégrant $X'(t) = F(X(t))$ entre k et $k+1$, on obtient :

$$X(k+1) - X(k) = \int_k^{k+1} F(X(t))dt. \tag{5.4}$$

En notant $F(X(t)) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$ et en appliquant le théorème de la moyenne sur chacune des composantes, il existe $t_1^k, \ldots t_n^k \in [n, n+1]$ tels que

$$\int_k^{k+1} F(x(t))dt = \begin{pmatrix} g_1(t_1^k) \\ \vdots \\ g_n(t_n^k) \end{pmatrix}$$

En faisant tendre k vers l'infini dans l'égalité (5.4), on obtient donc que $F(l) = 0$, ce qui signifie que l est un point d'équilibre. $\square$

Remarque. *En dimension 1, F est toujours de signe constant entre les points d'équilibres. Par conséquent, toute solution du problème de Cauchy* (5.1) *avec X_0 différent d'un point d'équilibre sera une fonction strictement monotone. Dans le cas où l'on peut montrer que la solution est bornée, elle convergera ainsi vers un point d'équilibre.*

3 Stabilité des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

On s'intéresse maintenant aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants où l'on va voir qu'il existe un critère simple permettant de savoir si l'on a un équilibre (asymptotiquement) stable ou non. La suite du chapitre présentera ensuite des résultats concernant les systèmes linéaires.

La réduction d'une matrice en blocs de Jordan (éventuellement dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ permet directement d'obtenir les résultats suivants :

Proposition 5.4

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système $X'(t) = AX(t)$ si, et seulement si, pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Proposition 5.5

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. 0 est un point d'équilibre stable du système $X'(t) = AX(t)$ si, et seulement si pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$:

$$\begin{cases} Re(\lambda) < 0 \\ \text{ ou} \\ Re(\lambda) = 0 \text{ et } \dim(E_\lambda) = m_\lambda \end{cases}$$

où $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$ est le sous espace propre (complexe) associé à λ et m_λ la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique χ_A.

Exemple.

- Dans le cas $n = 2$, on considère $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X$ avec $X \in \mathbb{R}^2$. Le point 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.
- Dans le cas $n = 2$, on considère $F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$ avec $X \in \mathbb{R}^2$. Le point 0 est un point d'équilibre stable mais n'est pas asymptotiquement stable.

4 Théorèmes de stabilité et fonctions de Liapunov

Dans cette partie du cours, nous prenons comme norme sur $\mathbb{R}^n$ la norme euclidienne de l'espace vectoriel euclidien. On note, pour tout $A \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, $B(A,r)$ la boule ouverte de centre A et de rayon r, et on note $\overline{B}(A,r)$ la boule fermée.

1. Trois exemples simples

L'objectif de cette partie est de comprendre la notion de fonction de Liapunov à traver l'étude de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants pour lesquels on connaît déjà les résultats de stabilité. Cela permettra ensuite d'établir des résultats plus généraux, s'appliquant notamment aux systèmes différentiels non linéaires.

a. Exemple 1 : oscillations harmoniques

On considère l'équation du pendule pesant linéarisée (pour les petits angles) :

$$x''(t) + x(t) = 0.$$

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, cette équation est équivalente à $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X(t)$, soit au système $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$.

D'un point de vue physique, l'équation $x''(t) + x(t)$ correspond en fait à l'écriture de la seconde loi de Newton $\vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$.
En multipliant cette équation par $\vec{v}$ (multiplication au sens du produit scalaire), on obtient

$$\vec{F} \cdot \vec{v} - m\vec{a} \cdot \vec{v} = 0.$$

Les termes de cette dernière équation sont homogènes à une puissance (en Watt). L'équation signifie que la puissance apportée au système est nulle en tout tenmps t. En intégrant, on obtient le théorème de l'énergie cinétique à savoir qu'ici, l'énergie mécanique du système est constante (on dit que le système est conservatif).
En physique, l'énergie mécanique du système est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. L'énergie cinétique est liée à la vitesse ($E_c = \frac{1}{2}mv^2$) tandis que l'énergie potentielle est fonction de la position (plus le système est « élevé », plus son énergie potentielle est grande). Autrement dit, comme l'énergie mécanique se conserve, lorsque la hauteur du pendule diminue, sa vitesse augmente et lorsque la hauteur augmente, sa vitesse diminue.

Nous allons maintenant traduire ces considérations énergétiques en des termes mathématiques :
On multiplie l'équation différentielle par $x'(t)$ (ce qui correspond à la multiplication par $\vec{v}$ d'un point de vue physique) :

$$x'(t)x''(t) + x'(t)x(t) = 0$$

En intégrant, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(x'(t)^2 + x(t)^2\right) = \text{cste}.$$

Par conséquent, les solutions du système considéré décrivent des trajectoires circulaires (des cercles centrés en l'origine). Le point d'équilibre 0 est stable. D'un point de vue géométrique, on le comprend par le fait que les solutions ne s'éloignent pas de l'origine. Du point de vue physique, l'énergie est conservée : il n'y a pas d'apport d'énergie et le système reste donc « proche » de son état d'équilibre.

La fonction définie par $V(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ est appelée fonction de Liapunov. Si $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est une solution du système, la fonction $E(t) = V(x(t), y(t))$ correspond à l'énergie au temps t. Ici, cette énergie est constante.

b. Exemple 2

On considère le système $X'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X(t)$. Le point d'équilibre 0 est clairement un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Ici, en définissant $V(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$, si $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est une solution du système et si $E(t) = V(x(t), y(t))$, on a :

$$E'(t) = \nabla V(x(t), y(t)) \cdot F(x(t), y(t)) = -x(t)^2 - y(t)^2 < 0.$$

Cela signifie que l'énergie du système diminue au cours du temps : en partant d'un point proche de 0, la solution va converger vers 0. Pour ainsi dire, le système ne pourra pas acquérir pas une énergie suffisante pour s'éloigner de 0.

D'un point de vue mathématique, les lignes de niveaux étant des cercles, le fait que $\nabla V(X)\cdot F(X) < 0$ traduit le fait que les trajectoires sont orientée vers l'intérieur des cercles et explique la convergence des solutions vers 0.

c. Exemple 3

On considère enfin le système $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X(t)$. Le tracé du portrait de phase permet immédiatement de voir que 0 est un point d'équilibre instable (1 est une valeur propre strictement positive). En reprenant la même fonction V et la même fonction E que précédemment :

$$E'(t) = x(t)^2 - y(t)^2.$$

Si, par exemple, $y(t) = 0$ (c'est à dire que l'on se trouve sur l'axe des abscisses), l'énergie du système sera strictement croissante. Cela est lié au fait que le point 0 est instable.
Nous notons au passage qu'il suffit qu'une des directions mène à s'éloigner du point d'équilibre pour que celui-ci soit instable. Cela est une différence importante avec les points d'équilibres stables pour lesquels il est nécessaire d'établir la stabilité sur tout un voisinage du point.

2. Critère de stabilité de Liapunov

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ou Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que F est continue, localement lipschitzienne en chacun de ses points.
On suppose que $\overline{X} \in \Omega$ est tel que $F(\overline{X}) = 0$, donc un point d'équilibre.
On a le résultat suivant.

Théorème 5.6 – Théorème de Liapunov

On suppose qu'il existe une fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que V est de classe C^1, et qu'il existe $a > 0$ avec

1. $\overline{B}(\overline{X}, a) \subset \Omega$,
2. $V(\overline{X}) = 0$ et $V(X) > 0$ pour tout $X \in \overline{B}(\overline{X}, a) \setminus \{\overline{X}\}$,
3. $\nabla V(X)\cdot F(X) \leqslant 0$ pour tout $X \in \overline{B}(\overline{X}, a)$.

Alors $\overline{X}$ est un point d'équilibre stable. De plus, si on suppose que $\nabla V(X)\cdot F(X) < 0$ pour tout $X \in \overline{B}(\overline{X}, a) \setminus \{\overline{X}\}$, $\overline{X}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Remarque. *Une fonction V vérifiant les hypothèses du théorème 5.6 est appelée **fonction de Liapunov**.*

Exemple. La fonction $F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$ avec $X \in \mathbb{R}^2$, satisfait ces hypothèses avec $\nabla V(X)\cdot F(X) = 0$ pour $V(X) = |X|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Le point 0 est donc un point d'équilibre stable. En revanche, il ne satisfait pas l'inégalité stricte permettant de conclure à un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Démonstration. • Soit (J, X) une solution maximale et $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les hypothèses du théorème.
Soit $\varepsilon \in]0, a]$ donné. Comme la fonction V est continue, elle atteint son minimum $m > 0$ sur le compact $S(\overline{X}, \varepsilon) = \{X \in \Omega,\ \|X - \overline{X}\| = \varepsilon\}$. Soit $\delta \in]0, \varepsilon[$ tel que

$$\forall X \in B(\overline{X}, \delta),\ V(X) < m.$$

Soit $X_0 \in B(\overline{X},\delta)$ et soit (X,J) avec $J=[0,T[$ ou $[0,+\infty[$ la solution locale maximale du problème de Cauchy autonome

$$X'(t) = F(X(t)) \text{ et } X(0) = X_0.$$

Montrons que

$$\forall t \in J,\ \|X(t)-\overline{X}\| < \varepsilon. \tag{5.5}$$

Supposons le contraire. Soit $t_1 \in J$ le plus petit $t \in J$ tel que $\|X(t)-\overline{X}\| = \varepsilon$. On a alors $t_1 > 0$ (car $X(t) \in B(\overline{X},\delta)$ sur un voisinage de 0 par continuité de X) et $V(X(t_1)) \geqslant m$ puisque $X(t_1) \in S(\overline{X},\varepsilon)$. Nous considérons la fonction réelle $E(t) = V(X(t))$. Cette fonction est de classe $C^1(J)$ et vérifie $E'(t) = \nabla V(X(t))\cdot X'(t) = \nabla V(X(t))\cdot F(X(t)) \leqslant 0$.
E est donc décroissante. Comme $E(X(0)) < m$ et $E(X(t_1)) \geqslant m$, cela est absurde. Ainsi, (5.5) est démontré, ce qui implique, par théorème des bouts, que $J=[0,+\infty[$. On a donc montré que l'équilibre est stable.

- Supposons maintenant que $\nabla V(X)\cdot F(X) < 0$ pour tout $X \in \overline{B}(\overline{X},a)\setminus\{\overline{X}\}$. Soit δ donné comme ci-dessus pour $\varepsilon = a$ et soit $X_0 \in \overline{B}(0,\delta)$, et $X(t)$ tel que

$$X'(t) = F(X(t)) \text{ et } X(0) = X_0.$$

Alors, pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a $X(t) \in B(\overline{X},a)\setminus\{\overline{X}\}$ (on ne peut pas avoir $X(t)=\overline{X}$ par unicité de la solution maximale) et la fonction $E(t) = V(X(t))$ vérifie

$$\forall t \in [0,+\infty[, E'(t) < 0.$$

Donc la fonction E est décroissante minorée par 0, elle converge vers un réel noté ℓ quand $t \to \infty$.
Supposons que l'on n'a pas $\lim_{t\to\infty} X(t) = \overline{X}$. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $T \in [0,+\infty[$, il existe $t_T > T$ avec $\|X(t_T)-\overline{X}\| \geqslant \varepsilon_0$ (on a donc $\varepsilon_0 \leqslant a$). Comme $\|F(Z)\|$ est borné par M pour tout $Z \in \overline{B}(0,a)$, pour tout $t \in [t_T, t_T + \frac{\varepsilon_0}{2M}]$,

$$\|X(t)-X(t_T)\| = \|\int_{t_T}^{t} F(x(s))\mathrm{d}s\| \leqslant (t-t_T)M \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2M}M,$$

donc, par inégalité triangulaire,

$$\|X(t)-\overline{X}\| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Comme l'ensemble $K = \overline{B}(\overline{X},a)\setminus B(\overline{X},\frac{\varepsilon_0}{2})$ est un compact, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $Z \in K$, $\nabla V(Z)\cdot F(Z) \leqslant -\alpha$.
On a alors, comme $X(s) \in K$ pour tout $s \in [t_T, t_T + \frac{\varepsilon_0}{2M}]$,

$$E(t_T + \frac{\varepsilon_0}{2M}) - E(t_T) = \int_{t_T}^{t_T+\frac{\varepsilon_0}{2M}} \nabla V(X(s))\cdot F(X(s))\mathrm{d}s \leqslant -\alpha\frac{\varepsilon_0}{2M}.$$

En faisant tendre T vers l'infini, on obtient

$$0 = \ell - \ell \leqslant -\alpha\frac{\varepsilon_0}{2M} < 0,$$

ce qui est impossible. Donc $\lim_{t\to\infty} X(t) = \overline{X}$.

□

Théorème 5.7 – Théorème de Chetaev

On suppose qu'il existe une fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a > 0$ tels que

1. $\overline{B}(\overline{X},a) \subset \Omega$,
2. $V(\overline{X}) = 0$ et $\overline{X}$ appartient à l'adhérence de l'ensemble $\{X \in \overline{B}(\overline{X},a)\,;\, V(X) > 0\}$,
3. Pour tout $X \in \overline{B}(\overline{X},a)$ tel que $V(X) > 0$, on a $\nabla V(X)\cdot F(X) > 0$.

Alors $\overline{X}$ est un point d'équilibre instable.

Remarque. *Là aussi, une fonction V vérifiant les hypothèses du théorème 5.7 est appelée* ***fonction de Liapunov***.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]0,a]$, et soit $X^{(0)} \in B(\overline{X}, \varepsilon)$ tel que $V(X^{(0)}) > 0$ (ainsi $X^{(0)} \neq \overline{X}$). Soit (J,X) avec $J = [0,T[$ ou $[0,+\infty[$ la solution maximale du problème de Cauchy autonome

$$X'(t) = F(X(t)) \text{ et } X(0) = X^{(0)}.$$

On souhaite montrer qu'il existe un temps $t_1 > 0$ tel que $\|X(t_1) - \overline{X}\| \geqslant \varepsilon$. On pose

$$G = \left\{ Y \in \overline{B}(\overline{X}, a), V(Y) \geqslant \frac{V(X_0)}{2} \right\}$$

La fonction continue $Y \mapsto \nabla V(Y) \cdot F(Y)$ atteint son minimum sur le compact G, noté $b > 0$. On sait de plus que $X_0 \in G$. Tant que, pour $t \in J$, on a $X(t) \in G$, la fonction réelle $E(t) = V(X(t))$, qui est de classe $C^1(J)$, vérifie $E'(t) = \nabla V(X(t)) \cdot X'(t) = \nabla V(X(t)) \cdot F(X(t)) \geqslant b$. Donc E est croissante et $E(t) \geqslant E(0) + bt > 0$ pour un tel t. Si, pour tout $t \in J$, $X(t) \in G$, alors la solution est globale et $J = [0,+\infty[$. Comme la fonction E est bornée sur le compact G, ceci est en contradiction avec $E(t) \geqslant E(0) + bt$. Donc il existe $t \in J$ tel que $X(t) \notin G$. Soit

$$t_1 = \inf\{t \in J, X(t) \notin G\} = \inf \left\{ t \in J, \|X(t) - \overline{X}\| > a \text{ ou } V(X(t)) < \frac{V(X_0)}{2} \right\}.$$

Alors $X(t_1)$ est sur la frontière de G, ce qui signifie $\|X(t_1) - \overline{X}\| = a$ ou $V(X(t_1)) = \dfrac{V(X_0)}{2}$. Comme $V(X(t_1)) \geqslant V(X_0) > \dfrac{V(X_0)}{2}$, on a donc $\left\|X(t_1) - \overline{X}\right\| = a$. Cela montre que le point $\overline{X}$ est un point d'équilibre instable. □

3. Critère de stabilité pour les fonctions de classe C^1

On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 5.8

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont toutes les parties réelles des valeurs propres sont strictement négatives. Alors il existe une matrice symétrique définie positive P telle que $A^T P + PA = -\mathrm{I}_n$.

Démonstration. Soit, pour tout $t > 0$, $M(t) = \exp(tA^T)\exp(tA)$. L'hypothèse sur A implique que

$$\lim_{t \to +\infty} \exp(tA) = \lim_{t \to +\infty} \exp(tA^T) = 0.$$

On a alors

$$\int_0^{+\infty} M'(t)\mathrm{d}t = -M(0) = -\mathrm{I}_n.$$

Or $M'(t) = A^T M(t) + M(t)A$. Donc la matrice

$$P = \int_0^{+\infty} M(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \exp(tA^T)\exp(tA)\mathrm{d}t$$

vérifie la conclusion de l'énoncé, car pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
$X^T \exp(tA^T)\exp(tA)X > 0$, comme $\exp(tA)$ est une matrice inversible et $\exp(tA^T) = (\exp(tA))^T$. □

On peut maintenant énoncer les résultats suivants donnant des conditions (seulement suffisantes) sur la Jacobienne d'un système différentiel non linéaire pour qu'un point d'équilibre soit asymptotiquement stable.

Théorème 5.9 – Critère de stabilité du point d'équilibre $\overline{X}$

On suppose que la fonction F est de classe C^1 et que toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $\nabla_X F$ ont une partie réelle strictement négative. Alors le point $\overline{X}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Démonstration. On note $A = \nabla_{\overline{X}} F$ la matrice Jacobienne de F au point $\overline{X}$.
On a l'existence d'une matrice $E(X)$ telle que

$$F(X) = F(\overline{X}) + (A + E(X))(X - \overline{X}),$$

avec $\lim_{X \to \overline{X}} E(X) = 0$.
Soit P la matrice symétrique définie positive donnée à partir de A par le lemme 5.8. On considère la fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $V(X) = (X - \overline{X})^T P (X - \overline{X})$. On a alors, pour $X \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\nabla V(X) \cdot F(X) &= (X - \overline{X})^T P F(X) + F(X)^T P (X - \overline{X}) \\ &= (X - \overline{X})^T (PA + A^T P + R(X))(X - \overline{X}) = (X - \overline{X})^T (-\mathrm{I}_n + R(X))(X - \overline{X}),\end{aligned}$$

avec $R(X) = PE(X) + E(X)^T P$ symétrique telle que

$$\lim_{X \to \overline{X}} R(X) = 0.$$

Comme cela s'applique à la norme subordonnée de la norme euclidienne, la valeur propre de plus grande valeur absolue de $R(X)$ tend donc vers 0, et donc il existe alors $a > 0$ tel que, pour tout $X \in \overline{B}(\overline{X}, a)$, $\mathrm{Sp}(R(X)) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a alors

$$\forall X \in \overline{B}(\overline{X}, a) \setminus \{\overline{X}\}, \ (X - \overline{X})^T (-\mathrm{I}_n + R(X))(X - \overline{X}) < 0.$$

Les hypothèses du théorème 5.6 sont donc satisfaites. □

Théorème 5.10 – Critère d'instabilité du point d'équilibre $\overline{X}$

On suppose que la fonction F est de classe C^1 et que l'une des valeurs propres de la matrice Jacobienne $\nabla_{\overline{X}} F$ a une partie réelle strictement positive. Alors le point $\overline{X}$ est un point d'équilibre instable.

Démonstration. Comme dans la démonstration précédente, on note $A = \nabla_{\overline{X}}$. On considère la décomposition de Schur de la matrice A. Il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $\widehat{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $A = Q\widehat{A}Q^T$, et telles que $\widehat{A}$ soit de la forme suivante :

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A_1 & \times & \times & \times & \times & \times \\ & A_2 & \times & \times & \times & \times \\ & & A_3 & \times & \times & \times \\ & & & \dots & \times & \times \\ & 0 & & & A_{p-1} & \times \\ & & & & & A_p \end{pmatrix}.$$

Les blocs diagonaux $A_i \in \mathscr{M}_{c_i}(\mathbb{R})$ pour $i = 1, \dots, p$ sont des matrices de côté $c_i = 1$ ou 2, associés respectivement aux valeurs propres réelles et aux valeurs propres comportant une partie imaginaire non nulle, et les symboles $\times$ représentent des termes pouvant être non nuls. On ordonne les blocs de telle sorte que le dernier bloc, noté A_p, de côté $c_p = 1$ ou 2, soit associé à une valeur propre ayant une partie réelle strictement positive. Soit P_p la matrice de côté c_p donnée par le lemme 5.8 à partir de $-A_p$, et soit $P = Q\widehat{P}Q^T$, où $\widehat{P}$ est donnée par

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & & & \cdots & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & P_p \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\widehat{A}^T\widehat{P} = Q \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & & & \cdots & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & A_p^T P_p \end{pmatrix} Q^T \text{ et } \widehat{P}\widehat{A} = Q \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & & & \cdots & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & P_p A_p \end{pmatrix} Q^T.$$

On en déduit

$$A^T P + PA = Q(\widehat{A}^T\widehat{P} + \widehat{P}\widehat{A})Q^T = Q\widehat{R}Q^T,$$

où $\widehat{R}$ est donnée par

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & & & \cdots & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \mathrm{I}_{c_p} \end{pmatrix}.$$

Dans l'expression ci-dessus, I_{c_p} est la matrice identité de côté c_p. Un raisonnement analogue à celui de la preuve du théorème 5.9 permet alors d'appliquer le théorème 5.7, avec

$$V(X) = (X - \overline{X})^T P(X - \overline{X}).$$

□

Remarque. *Pour les systèmes différentiels non linéaires, dans les cas où la Jacobienne admet des valeurs propres de partie réelles nulles, il n'est pas possible de conclure quant à la stabilité du point d'équilibre. Cela est une différence importante d'avec les systèmes linéaires.*

Exercices

Exercice 1. Solutions périodiques
Soit $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et localement Lipschitzienne sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soit (J,X) la solution maximale et non constante de $X'(t) = F(X(t))$. On suppose qu'il existe $T \in J \cap]0;+\infty[$ tel que $X(T) = X(0)$. On a donc $[0;T] \subset J$.

1. Montrer que $[0,2T] \subset J$ et que pour tout $t \in [0;T], X(t+T) = X(t)$
2. Monter ensuite que $J = \mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}, X(t+T) = X(t)$.
3. On note $T_1 = \inf\{t > 0;\ X(t) = X(0)\}$ (cet inf existe car l'ensemble considéré est minoré et non vide).
   Montrer que $T_1 > 0$ et que $T_1 = \min\{t > 0;\ X(t) = X(0)\}$.
4. Les questions précédentes montrent que X est T_1 périodique. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_1 = \dfrac{T}{n}$.

Exercice 2. Étude de points d'équilibre
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x(x^2 - 1). \tag{5.6}$$

1. Prouver que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution maximale (J,x), avec $x \in C^1(J)$ et J intervalle ouvert tel que $0 \in J$, solution du problème $x(0) = x_0$ et $x'(t) = f(x(t))$.
2. Prouver que $x \in C^\infty(J)$.
3. Donner, dans le cas du problème avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la définition de « x_0 est un point d'équilibre stable », « x_0 est un point d'équilibre instable », « x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable ».
4. Trouver les points d'équilibre et étudier leur stabilité au moyen du théorème du cours.
5. Prouver que, lorsque $x_0 \in [-1,1]$, la solution maximale est globale. Donner, avec justification, les limites en $\pm\infty$ de la solution selon la valeur de $x_0 \in [-1,1]$.
6. Soit $x_0 > 1$. Prouver que pour tout $t \in J$, $x(t) > 1$. En déduire que pour tout $t \in J \cap [0,+\infty[$, $x'(t) > x(t)^2 - 1$. En intégrant la relation
   $$\forall s \in [0,t],\ \frac{x'(s)}{x(t)^2 - 1} > 1$$
   entre 0 et t, en déduire que la solution maximale n'est pas globale. Quelle est sa limite en $T = \sup J$? Quelle est sa limite en $-\infty$? (un raisonnement similaire s'applique pour $x_0 < -1$).
7. Tracer le portrait de phase de l'équation différentielle.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que F est localement lipschitzienne en chacun de ses points. Pour $X_0 \in \Omega$ donné, On étudie le problème de Cauchy autonome posé sur $I = [0,+\infty[$:

$$\forall t \in J,\ X'(t) = F(X(t)) \text{ et } X(0) = X_0,$$

où (X,J), avec $J = [0,T[$, $T > 0$ ou $J = [0,+\infty[$, est la solution locale maximale du système différentiel.
On suppose qu'il existe une fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que V est de classe C^1 et telle que

- $\forall A \in [V(X_0),+\infty[$, $\{X \in \Omega : V(X) \leqslant A\}$ est un compact de Ω,
- il existe des réels $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ tels que $\nabla V(X) \cdot F(X) \leqslant \alpha V(X) + \beta$ pour tout $X \in \Omega$.

1. Dans cette question seulement, on suppose que $\Omega = \mathbb{R}^3$, $F : (x_1,x_2,x_3)^t \mapsto (x_2, x_1x_3, -x_1x_2)^t$, $V : (x_1,x_2,x_3)^t \mapsto x_1^2 + x_2^2 + (x_3+1)^2$. Prouver que les hypothèses de l'exercice sont satisfaites dans ce cas, et donner explicitement la valeur de $\nabla V(X) \cdot F(X)$.
   Dans les questions suivantes, on revient au cas général.
2. Soit $f : J \to \mathbb{R}$, $t \mapsto V(X(t))$. Prouver que f est de classe C^1 et calculer f'.
3. Trouver une fonction continue $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in J$, $f(t) \leqslant g(t)$ (on donnera l'expression explicite d'une telle fonction g au moyen de $V(X_0)$, α et β, en distinguant les cas $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$).
4. En déduire que $J = I$.

Exercice 4. On pose $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ est la fonction définie pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(X) = \begin{pmatrix} x_1(1-(x_1^2+x_2^2))+x_2 \\ -x_1+x_2(1-(x_1^2+x_2^2)) \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

On s'intéresse à la solution maximale (J, X) du système différentiel d'ordre 2 suivant :

$$X(0) = X^{(0)} \text{ et } \forall t \in J,\ X'(t) = F(X(t)), \quad (5.8)$$

où l'on étudie le problème sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$, l'intervalle de définition de la solution maximale s'écrit $J = [0, t_M[$ avec $t_M > 0$ ou bien $J = I, X : J \to \Omega, X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Etudier les points d'équilibre, et leur stabilité.
2. On suppose à partir de cette question que $X^{(0)} \neq (0,0)^t$, on définit $r(t) = (x_1(t)^2 + x_2(t)^2)^{1/2}$ pour $t \in J$ et $X(t) = (x_1(t), x_2(t))^t$. Donner l'expression de $r'(t)$ en fonction de $r(t)$ et en déduire que $r \in C^1(J)$.
3. Prouver que r est bornée sur tout intervalle borné.
4. En déduire que $J = [0, +\infty[$ et que $\lim_{t\to+\infty} r(t) = 1$.
5. On définit $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ tel que $x_1^{(0)} = r(0)\cos(\theta_0)$ et $x_2^{(0)} = r(0)\sin(\theta_0)$. Prouver que $X(t) = (r(t)\cos(\theta_0 - t), r(t)\sin(\theta_0 - t))^t$. En déduire l'allure du portrait de phases.

Chapitre 6

Modélisations

1 Modèle SIR en épidémiologie

Dans une population de taille N (constante), on note $s(t)$ la proportion de personnes susceptibles, $i(t)$ la proportion de personnes infectées et $r(t)$ la proportion de personnes retirées.

1. Montrer que, sous des hypothèses que l'on précisera, la situation se modélise par le système différentiel suivant défini sur $I = [0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -asi \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = asi - bi \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = bi \end{cases}$$

   avec les conditions initiales $s(0) = N - i_0$, $i(0) = i_0$ et $r(0) = 0$ (en supposant $i_0 < N$).
2. Prouver l'existence d'une solution locale au problème de Cauchy (on notera J l'intervalle de définition de la solution maximale).
3. Déterminer l'ensemble des points d'équilibre dans $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que
$$\forall t \in J \cap]0, +\infty, \quad s(t) > 0,\ i(t) > 0 \ \text{ et } r(t) > 0$$
5. On pose $P(t) = s(t) + i(t) + r(t)$. Montrer que P est constante et en déduire que $J = [0, +\infty[$.
6. **Étude de la convergence de la solution**
   (a) Justifier que $s(t)$ possède une limite $l_1 \geqslant 0$ quand $t \to \infty$, puis que $i(t)$ possède une limite $l_2 \geqslant 0$ quand $t \to \infty$.
   (b) En déduire que la solution du problème de Cauchy converge lorsque $t \to +\infty$.
   (c) Montrer que $l_2 = 0$.
   (d) Montrer que pour tout $t \geqslant 0$,
$$r(t) = -\frac{b}{a} \ln\left(\frac{s(t)}{s(0)}\right).$$

(e) En déduire que l_1 est l'unique solution dans l'intervalle $]0;1[$ de l'équation

$$1-x+\frac{b}{a}\ln\left(\frac{x}{1-i_0}\right)=0.$$

7. On note $l_3=\lim_{t\to+\infty} r(t)$ et $\mathscr{R}_0=\frac{a}{b}$.
   (a) Interpréter le sens de $\mathscr{R}_0$.
   (b) Dans le cas où $\mathscr{R}_0>1$ et $\mathscr{R}_0\approx 1$ et si i_0 est très petit (devant 1) montrer par un développement limité que
   $$l_3\approx 2(\mathscr{R}_0-1).$$
   (c) Montrer enfin que, sous les même hypothèses, en notant τ la date du pic épidémique,
   $$i(\tau)\approx\frac{(\mathscr{R}_0-1)^2}{2}.$$

2 Modèles en économie

1. Équation logistique

L'équation logistique, introduit initialement par Pierre François Verhulst pour modéliser la croissance d'une population, permet de comprendre certains phénomènes économiques en modélisant par exemple l'exploitation d'une ressource non renouvelable. On considère ainsi une ressource dont l'évolution est modélisée par l'équation logistique suivante :

$$R'(t)=rR(t)\left(1-\frac{R(t)}{K}\right)$$

où $R(t)\in\mathbb{R}$ est la quantité de ressource exploitée au temps $t\in[0,+\infty[$ et où les constantes du système sont :

- le taux de croissance intrinsèque $r>0$,
- la capacité de charge $K>0$.

1. Justifier les dénominations « taux de croissance intrinsèque » et « capacité de charge ».
2. Déterminer l'ensemble des points d'équilibre de l'équation différentielle.
3. Soit $R_0>0$. Justifier qu'il existe une unique solution maximale (J,R) du problème de Cauchy suivant :
   $$\begin{cases} R'(t)=rR(t)\left(1-\frac{R(t)}{K}\right)\\ R(0)=R_0\end{cases}$$
   (où J est un intervalle ouvert de $[0;+\infty[$)
4. Justifier que pour tout $t\in J$, $R(t)>0$.
5. En utilisant le changement de variable $X(t)=\frac{1}{R(t)}$, calculer l'expression de R en fonction de $t\in J$ puis en déduire que la solution maximale est globale.
6. Selon la valeur de R_0, déterminer les variations de la fonction R.
7. Déterminer $\lim_{t\to+\infty}R(t)$.

2. Énergies fossiles *vs* énergies renouvelables

On considère le problème de Cauchy suivant modélisant la part des énergies fossiles et renouvelables dans le mix énergétique d'un pays et défini sur $I = [0;+\infty[$.

$$(E_1) : \begin{cases} F'(t) = r_1 F(t)\left(1 - \dfrac{F(t)+\alpha_1 R(t)}{K_1}\right) & \text{avec} \quad F(0) = F_0 \\ \\ R'(t) = r_2 R(t)\left(1 - \dfrac{R(t)+\alpha_2 F(t)}{K_2}\right) & \text{avec} \quad R(0) = R_0 \end{cases}$$

où les grandeurs mises en jeu sont :

- $F(t)$: consommation d'énergie fossile (charbon, pétrole, gaz)
- $R(t)$: consommation d'énergie renouvelable (solaire, éolien, hydroélectrique)
- $F_0 \geqslant 0$: consommation initiale d'énergie fossile
- $R_0 \geqslant 0$: consommation initiale d'énergie renouvelable
- $r_1 > 0$: taux de croissance autonome des fossiles en absence de renouvelables (demande, infrastructure en place)
- $r_2 > 0$: taux de croissance autonome des énergies renouvelables en absence fossiles (innovation, investissements)
- $\alpha_1 > 0$: compétition exercée par les renouvelables sur les énergies fossiles (substitution technologique, régulation)
- α_2 : freinage des énergies renouvelables dû aux énergies fossiles (monopoles, inertie industrielle, lobbying)
- $K_1 > 0$: capacité de charge des énergies fossiles
- $K_2 > 0$: capacité de charge des énergies renouvelables

1. En faisant les changements d'inconnues $x(t) = \dfrac{F(t)}{K_1}$ et $y(t) = \dfrac{R(t)}{K_2}$, montrer que le problème de Cauchy (E_1) est équivalent à

$$(E_2) : \begin{cases} x'(t) = r_1 x(t)\,(1-(x(t)+a_1 y(t))) & \text{avec} \quad x(0) = x_0 \\ \\ y'(t) = r_2 y(t)\,(1-(y(t)+a_2 x(t))) & \text{avec} \quad y(0) = y_0 \end{cases}$$

   où $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ $x_0 \geqslant 0$ et $y_0 \geqslant 0$ sont des constantes que l'on exprimera en fonction de α_1, α_2, K_1, K_2, F_0 et K_0.
   Dans la suite, on notera $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et on supposera $a_1 a_2 \neq 1$.

2. Montrer qu'il existe une unique solution maximale (J, X) au problème de Cauchy (E_2) et que $X \in \mathscr{C}^\infty(J)$.

3. Montrer que pour tout $t \in J$,

$$0 \leqslant x(t) \leqslant \max(1, x_0) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y(t) \leqslant \max(1, y_0).$$

   En déduire que $J = [0;+\infty[$.
   Indication : pour montrer l'inégalité $x(t) \leqslant \max(1, x_0)$ *on pourra raisonner par l'absurde et commencer par appliquer le théorème des accroissements finis entre* t_0 *et* t_1.

4. Dans le cas $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$, déterminer l'expression de la solution. Quelle est la limite de $\begin{pmatrix} F(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$ (lorsque $t \to +\infty$) dans ces cas ?

5. Montrer que le système différentiel admet trois ou quatre points d'équilibres selon les valeurs de a_1 et a_2.

6. Avec python, tracer le portrait de phase du système.
7. On rappelle que l'on a supposé $a_1 a_2 \neq 1$. Pour cette question (uniquement), on supposera également que $a_1 \neq 1$ et $a_2 \neq 1$. Étudier la stabilité de chacun des points d'équilibres.
8. Dans toute la suite, on suppose $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ Montrer que pour tout $t \in [0;+\infty[$, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.
9. D'après la question précédente, pour tout $t \in [0;+\infty[$,
   $X(t)$ appartient à l'ensemble $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0 \right\}$.
   On restreint donc notre étude à ce quart de plan.
   On appelle **isocline** de x l'ensemble
   $$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ r_1 x(1-(x+a_1 y)) = 0 \right\} \cap P.$$
   De même, on appelle **isocline** de y l'ensemble
   $$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ r_2 y(1-(y+a_2 x)) = 0 \right\} \cap P.$$
   Ici, on distingue quatre cas selon que :
   - Les deux isoclines s'intersectent ou non en un point.
   - Dans le cas où elles ne s'intersectent pas, l'isocline de x est au-dessus ou en-dessous de l'isocline de y.
   - Dans le cas où elles s'intersectent, l'isocline de x a une pente supérieure ou inférieure à l'isocline de y.

   Remarque : l'intérêt des isoclines est le suivant : on sait les fonctions x et y sont monotones tant que la trajectoire n'intersecte pas l'une des isoclines.
   (a) Quelle condition sur a_1 et a_2 permet de savoir dans quel cas l'on se trouve ?
   (b) Tracer les isoclines dans ces quatre cas.
   (c) On se place dans le cas où $0 < a_1 < 1$ et $0 < a_2 < 1$. Montrer que la solution va nécessairement converger vers l'un des points d'équilibre du système.

3 Pendule pesant

Nous considérons le système différentiel du premier ordre suivant, dont l'inconnue est la fonction $X : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^2$, définie par $X(t) = (x_1(t), x_2(t))^t$ tel que $X'(t) = F(X(t))$ et $X(0) = X_0 = (a,b)^t \in \mathbb{R}^2$ donné avec, pour tout $Y = (y_1, y_2)^t \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} F_1(Y) &= y_2 \\ F_2(Y) &= -\sin(y_1), \end{aligned}$$

1. Expliquer l'origine du modèle.
2. (a) Résoudre l'équation en remplaçant $\sin(y_1)$ par y_1.
   (b) Expliquer en quoi l'erreur d'approximation est légitime.
3. Étudier l'existence et l'unicité de la solution maximale, notée (X, J), où J est un intervalle ouvert de $[0,+\infty[$. Justifier que cette solution maximale est globale.
4. Déterminer les points d'équilibre du système.
   Calculer la matrice Jacobienne du système en ces points. Que peut-on en déduire ?
5. Avec python, tracer le portrait de phase du système.

6. Prouver que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2}(x_2(t)^2 - b^2) = \cos(x_1(t)) - \cos(a) = 2\left(\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x_1(t)}{2}\right)\right).$$

ou encore, en définissant $k = \sqrt{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{4}b^2}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{4}x_2(t)^2 + \sin^2\left(\frac{x_1(t)}{2}\right) = k^2$$

Remarque : La quantité $\frac{1}{4}x_2(t)^2 + \sin^2\left(\frac{x_1(t)}{2}\right)$ est donc constante au cours du temps. D'un point de vu physique, il s'agit de l'énergie mécanique du système.

7. Etude du cas : $k > 1$. On supposera $b > 0$ (le cas $b < 0$ se traitant de manière similaire).
   (a) Prouver qu'il existe $c > 0$ tel que $x_2(t) \geqslant c$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Prouver qu'il existe $T > 0$ tel que $x_1(T) = a + 2\pi$.
   (c) Que vaut alors $x_2(T)$?
   (d) En étudiant le problème différentiel du premier ordre satisfait par $y_1(t) = x_1(T+t) - 2\pi$ et $y_2(t) = x_2(T+t)$, prouver que x_2 est périodique de période T, et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_1(T+t) = x_1(t) + 2\pi$.
8. Etude du cas : $k < 1$. On va montrer que la solution est périodique.
   On pose $k = \sin(\frac{\theta}{2})$ avec $\theta \in [0, \pi[$, et on supposera que $a \in]-\pi, \pi[$ (pourquoi ne peut-on pas avoir $|a| = \pi$?).
   (a) Prouver que $|x_1(t)| \leqslant \theta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que $\cos(\frac{x_1(t)}{2}) \geqslant \cos(\frac{\theta}{2}) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) On définit $\alpha_0 \in [-\pi, \pi[$ tel que $\frac{1}{2}b = k\cos(\alpha_0)$, $\sin(\frac{a}{2}) = k\sin(\alpha_0)$, et on définit $\alpha(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ par
   $$\alpha'(t) = \sqrt{1 - k^2\sin^2(\alpha(t))} \text{ et } \alpha(0) = \alpha_0.$$
   Pourquoi la fonction α est-elle définie pour tout $t \in \mathbb{R}$? On définit $\widetilde{x}_1(t) \in]-\pi, \pi[$ et $\widetilde{x}_2(t)$ par $\frac{1}{2}\widetilde{x}_2(t) = k\cos(\alpha(t))$ et $\sin(\frac{\widetilde{x}_1(t)}{2}) = k\sin(\alpha(t))$. Prouver que $\widetilde{x}_1(t) = x_1(t)$ et $\widetilde{x}_2(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (c) Prouver qu'il existe $T > 0$ tel que $\alpha(T) = \alpha(0) + 2\pi$.
   (d) Que valent alors $x_1(T)$ et $x_2(T)$?
   (e) En étudiant le problème différentiel du premier ordre satisfait par $y_1(t) = x_1(T+t)$ et $y_2(t) = x_2(T+t)$, prouver que x_1 et x_2 sont périodiques de période T.
9. Etude du cas : $k = 1$. On supposera que $a \in]-\pi, \pi[$ (que se passe-t-il si $|a| = \pi$?) et $b > 0$ (le cas $b < 0$ se traite de manière similaire).
   (a) Prouver que $|x_1(t)| < \pi$ et $x_2(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que $\cos(\frac{x_1(t)}{2}) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_2(t) = 2\cos(\frac{x_1(t)}{2})$ et donc que $x_1'(t) = 2\cos(\frac{x_1(t)}{2})$.
   (c) Prouver que $\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = \pi$ et $\lim_{t \to +\infty} x_2(t) = 0$.
10. Montrer que le point $(0,0)^t$ est un point d'équilibre stable. Est-il asymptotiquement stable ?
11. *Question bonus :* Traiter le cas du pendule pesant amorti.