L2 LAS-MI-MIASH-MPC-PRÉPA
Contrôle terminal 2è session
Algèbre II

Université Gustave Eiffel
Année 2023–2024

2h00
Les documents, téléphones et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 — Vrai/faux. Justifier par un argument bref ou un contre-exemple. 1 point par réponse correcte et justifiée.

1. Si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A+B) = \det(A)\det(B)$.
2. Si M est une matrice diagonale, elle est diagonalisable.
3. Pour u, v, w trois vecteurs d'un espace Euclidien, si $\langle u, v\rangle = 0$ et $\langle v, w\rangle = 0$, alors $\langle u, w\rangle = 0$.
4. Si F et G, deux sous-espaces vectoriels d'un espace Euclidien E, sont orthogonaux, alors $F+G = E$.
5. Si le spectre d'une matrice A est réduit au singleton $\{0\}$, alors la matrice A est nulle.

Exercice 2 — Polynômes. On fixe un entier $n \geq 1$, et on considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On définit une application $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

1. Rappeler la dimension de E.
2. Montrer que Φ définit un produit scalaire sur E.
3. Construire un polynôme P tel que $(1, P)$ forme une base orthogonale de $\mathrm{Vect}(1, X)$.

Exercice 3 — Permutations. Soit m un entier, et $n = 2m$. Soit $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ définie par

$$\sigma(k) = \begin{cases} k + m \text{ si } k \leq m, \\ k - m \text{ si } k > m. \end{cases}$$

1. Expliciter σ pour $m = 3$ et donner sa signature.
2. On revient au cas général. Décomposer σ comme produit de transpositions.
3. En déduire la signature de σ.

Exercice 4 — Spectre. Soit a et b deux réels.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ -2ab & -a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que M admette deux valeurs propres distinctes. Lorsque que c'est le cas, la matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Dans le cas où M a une valeur propre double, la matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit u un endomorphisme de E. On suppose que u vérifie :

$$\begin{aligned} u(e_1 + e_2) &= e_1 + e_2 \\ u(e_1 + e_3) &= -e_1 - e_3 \\ u(e_2 + e_3) &= -e_2 - e_3 \end{aligned}$$

1. Montrer que $u(e_1) = e_2$.
2. Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer les valeurs propres de u, avec leur multiplicité.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?