L2 LAS-MI-MIASH-MPC-PRÉPA
Examen final - 15 janvier 2024
Algèbre II

Université Gustave Eiffel
Année 2023–2024

2h00
Les documents, téléphones et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 — Vrai/faux. Justifier par un argument bref ou un contre-exemple. 1 point par réponse correcte et justifiée, 0.5 pour une réponse correcte, -0.5 par réponse incorrecte.

1. Si A et P sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si P est inversible, alors $\det(P^{-1}AP) = \det(P)$.
2. Toute matrice diagonale est diagonalisable.
3. Pour u, u', v, v' quatre vecteurs d'un espace Euclidien, si $\langle u, v\rangle = 0$ et $\langle u', v'\rangle = 0$, alors $\langle u + u', v + v'\rangle = 0$.
4. Si F et G, deux sous-espaces vectoriels d'un espace Euclidien E, vérifient $F \cap G = \{0\}$, alors F et G sont orthogonaux.
5. Si $\det(A) = 0$, alors la matrice A est nulle.

Dans les trois dernières questions, on considère l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux. On admet que la forme Φ définie par

$$\Phi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

définit un produit scalaire sur E ; on munit E de ce produit scalaire (“orthogonal” dans les questions suivantes signifie donc “orthogonal au sens du produit scalaire Φ”).

6. Les polynômes X^2 et 1 sont orthogonaux.
7. Le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathrm{Vect}(1)$ est 1.
8. L'orthogonal de l'ensemble $\{X^2 - 2X + 1\}$ est une droite vectorielle.

Solution —

1. Faux : si $A = 2I_n$ et $P = I_n$, alors $\det(P^{-1}AP) = \det(A) = 2^n \neq 1 = \det(P)$. En revanche $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$.
2. Vrai : toute matrice diagonale D peut s'écrire $D = PDP^{-1}$ en prenant pour matrice P la matrice identité.
3. Faux : sous l'hypothèse faite, $\langle u+u', v+v'\rangle = \langle u, v'\rangle + \langle u', v\rangle$, qui n'a pas de raison d'être nul ; on peut par exemple choisir $u = v'$ un vecteur non-nul et $u' = v = 0$ pour avoir un contre-exemple.
4. Faux : dans $\mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}((1, 0))$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 1))$ ont pour intersection $\{0\}$ mais ne sont pas orthogonaux.
5. Faux : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est non-nulle mais son déterminant vaut 0.
6. Faux : $\langle X^2, 1\rangle = 0^2 \times 1 + (-1)^2 \times 1 + 1^2 \times 1 = 2 \neq 0$.
7. Faux : la formule de projection orthogonale donne $\frac{\langle X^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 = 2/3$, donc le projeté de X^2 sur $\mathrm{Vect}(1)$ est le polynôme constant égal à $2/3$.
8. Faux : pour tout polynôme P on nul on a $\dim(\{P\}^{\perp}) = \dim((\mathrm{Vect}(P))^{\perp}) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Vect}(P)) = \dim(E) - 1$. Ici $\dim(E) = 3$ donc l'orthogonal est un plan vectoriel.

Exercice 2 — Polynômes annulateurs. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$(A^2 - 8A + 15\, I_n)(A - 2I_n)^2 = 0.$$

1. Montrer que A est trigonalisable.
2. Montrer que le spectre de A a au plus trois éléments que l'on explicitera. En déduire que $\det(A)$ est un entier naturel.

On suppose de plus dans les trois dernières questions que $\det(A)$ est un entier impair.

3. Montrer que 2 ne peut pas être valeur propre de A.
4. Montrer que le polynôme $P = X^2 - 8X + 15$ est un polynôme annulateur de A. En déduire que A est diagonalisable.
5. (Bonus) Déterminer un polynôme R de degré 1 tel que $A^{-1} = R(A)$.

Solution —

1. Par hypothèse, le polynôme $Q = (X^2 - 8X + 15)(X - 2)$ est annulateur de A. En calculant les racines du premier facteur, on peut écrire $Q = (X - 3)(X - 5)(X - 2)^2$, et Q est donc scindé sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que A est trigonalisable.
2. On sait que si P annule A, les valeurs propres de A sont nécessairement racines de P, donc $^{(}A) \subset \{2, 3, 5\}$. Comme A est trigonalisable elle peut s'écrire $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure ; comme $\chi_A = \chi_T$ les éléments diagonaux de T sont les valeurs propres de A apparaissant avec multiplicité. Comme $\det(A) = \det(PTP^{-1}) = \det(T)$, le déterminant de A est égal au produit des éléments diagonaux de T, qui sont tous égaux à 2, 3 ou 5, donc $\det(A)$ est un entier (plus précisément $\det(A) = 2^{m(2)}3^{m(3)}5^{m(5)}$).
3. D'après la formule précédente, $\det(A)$ ne peut être impair que si $m(2) = 0$ c'est-à-dire que 2 n'est pas valeur propre de A.
4. Comme 2 n'est pas valeur propre, $(A - 2I)$ est inversible. Comme $Q(A) = 0$, on a $Q(A)(A - 2I)^{-1}(A - 2I)^{-1} = 0$, donc $A^2 - 8A + 15I = 0$. Le polynôme $P = (X - 3)(X - 5)$ est donc annulateur de A. Comme P est scindé à racines simples, A est diagonalisable.
5. On isole I dans la formule $Q(A) = 0$: $(1/15)(-A^2 + 8A) = I$. On factorise par A à droite dans le terme de gauche :
$$\frac{1}{15}(-A + 8I)A = I.$$
On en déduit que $\frac{1}{15}(-A + 8I)$ est l'inverse de A, donc $R = (-X + 8)/15$ convient.

Exercice 3 — L'espace Euclidien $\mathbb{R}^4$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F := \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x + y - 2z - w = 0, x + y + w = 0\right\}.$$

Soit $G = F^\perp$ l'orthogonal de F pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que G est le sous espace vectoriel engendré par le vecteur $g_1 = (2, 1, -2, -1)$ et le vecteur $h_2 = (1, 1, 0, 1)$.
2. Déterminer un vecteur g_2 orthogonal à g_1 tel que $G = \mathrm{Vect}(g_1, h_2) = \mathrm{Vect}(g_1, g_2)$.
3. Soit $u = (1, 0, 1, 0)$. Montrer que $p_G(u) = \dfrac{1}{13}(3, 4, 2, 6)$, et en déduire $p_F(u)$.
4. Calculer la distance euclidienne du vecteur u au sous-espace vectoriel F.

Solution —

1. Pour $v = (x, y, z, w)$,

$$\begin{aligned}
v \in F &\iff 2x + y - 2z - w = 0 \text{ et } x + y + w = 0 \\
&\iff \langle v, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \text{ et } \langle v, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \\
&\iff \langle v, g_1 \rangle = \langle v, h_2 \rangle = 0 \\
&\iff v \in \{g_1, h_2\}^{\perp}.
\end{aligned}$$

   Par conséquent $F = \{g_1, h_2\}^{\perp}$. On prend l'orthogonal : $F^{\perp} = (\{g_1, h_2\}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(g_1, h_2)$ par une propriété du cours.

2. On vérifie aisément que la famille (g_1, h_2) est libre. On peut donc lui appliquer le procédé d'orthogonalisation de Schmidt : en posant $g_2 = h_2 - \frac{\langle g_1, h_2 \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} g_1$, on obtient un vecteur orthogonal à g_1 et tel que $\mathrm{Vect}(g_1, g_2) = \mathrm{Vect}(g_1, h_2)$. Le calcul donne $g_2 = (1/5) \times (3, 4, 2, 6)$.

3. La famille (g_1, g_2) est une BOG de G d'après la question précédente donc $p_G(u) = \frac{\langle g_1, u \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} g_1 + \frac{\langle g_2, u \rangle}{\langle g_2, g_2 \rangle} g_2$. Le premier produit scalaire est nul, et le deuxième terme donne la formule annoncée pour $p_G(u)$. Ensuite, comme $F = G^{\perp}$, $p_F(u) = u - p_G(u) = (1/13)(10, -4, 11, -6)$. Remarque : on peut vérifier la cohérence du calcul en montrant que le projeté obtenu vérifie bien les équations définissant F.

4. Le cours donne $d(u, F) = \|p_G(u)\| = \sqrt{\frac{1}{13^2}(3^2 + 4^2 + 2^2 + 6^2)} = \sqrt{5/13}$.

Exercice 4 — Étude d'un endomorphisme. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E. On considère l'endomorphisme f sur E défini par

$$\forall k \in \{1, \dots, 4\}, \; f(e_k) = e_k + \sum_{i=1}^{4} e_i.$$

1. Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$..
2. On pose $s = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Montrer que $f(s) = 5s$.
3. Montrer que si un vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$ avec $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ et $\sum_{k=1}^{4} x_k = 0$, alors $f(x) = x$.
4. Déduire des questions précédentes que $\{1, 5\} \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ et que

$$\dim(\ker(f - 5\,\mathrm{Id}_E)) \geq 1 \quad \text{et} \quad \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \geq 3.$$

5. En déduire que l'endomorphisme f est diagonalisable.
6. L'endomorphisme f est-il inversible ?
7. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice calculée dans la première question. Calculer le déterminant de A, et retrouver le résultat de la question précédente.
8. Quel argument direct donne la diagonalisabilité de A, sans passer par les calculs des questions précédentes ?

Solution —

1. On a $f(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$, etc., d'où la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.
$$f(s) = f(\sum_{k=1}^{4} e_k) = \sum_{k=1}^{4} f(e_k) = \sum_{k=1}^{4}(e_k + s) = (\sum_{k=1}^{4} e_k) + 4s = 5s.$$

3.
$$f(x) = \sum_{k=1}^{4} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k(e_k + s) = \sum_{k=1}^{4} x_k e_k + \sum_{k=1}^{4} x_k s.$$

La première somme vaut x, et dans la deuxième on peut factoriser le (vecteur) s à droite :

$$f(x) = x + (\sum_{k=1}^{4} x_k)s.$$

Si la somme des coordonnées $\sum_{k=1}^{4} x_k$ est nulle, on a bien $f(x) = x$.

4. Le vecteur s est non-nul (il est combinaison linéaire non-triviale des e_i qui forment une base), et $f(s) = 5s$ donc s est vecteur propre de f associé à la valeur propre 5. La dimension $\dim(E_5) = \dim(\ker(f - 5\,\mathrm{Id}_E))$ est au moins égale à 1 (comme pour tout espace propre). Par la question précédente, l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 contient $F = \{x = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i, \sum_{i=1}^{4} x_i = 0\}$. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de dimension $4 - 1 = 3$ de $\mathbb{R}^4$ (c'est le noyau de la forme linéaire non-nulle $x \mapsto \sum_{i=1}^{4} x_i$). Donc $\dim(E_1) \geq \dim(F) = 3$.
5. On sait que $4 \geq \sum_{\lambda \in (f)} \dim(E_\lambda) \geq \dim(E_1) + \dim(E_5) \geq 4$. Il y a donc égalité partout, 1 et 5 sont donc les seules valeurs propres, et f est diagonalisable.
6. Le nombre réel 0 n'appartient pas au spectre, donc $f = f - 0 \times \mathrm{Id}$ est inversible.
7. En faisant successivement $C_1 \leftarrow \sum_i C_i$, puis une factorisation de 5 dans C_1, puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i = 2, 3, 4$, on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} . = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

C'est bien cohérent avec les questions précédentes : $\det(A) = \chi_A(0) = \prod_{\lambda \in (A)} (-\lambda)^{m(\lambda)}$ et on sait ici que $m(\lambda) = \dim(E_\lambda)$ pour $\lambda \in^{(} A) = \{1, 5\}$, donc $\det(A) = (-1)^3(-5) = 5$.
8. La matrice A est symétrique à coefficients réels, donc diagonalisable en base orthonormée dans $\mathbb{R}^4$.