L2
Algèbre linéaire 2
L Deléaval, P.-A. Zitt

Université Gustave Eiffel
Année 2023–2024

TD 4 — Produit scalaire, orthogonalité

Produits scalaires, inégalités, calculs dans un espace euclidien

Exercice 1 — Un produit scalaire tordu. Soit a et b deux réels. Soit B l'application sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définie par

$$B\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + ax_2y_1 + bx_2y_2.$$

1. À quelle(s) condition(s) sur (a, b), B définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?
2. Préciser, pour $a = 2$ et $b = 5$, la norme définie par B.
3. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour cette norme.

Exercice 2 — Cauchy-Schwarz. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs vérifiant $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

1. En remarquant que pour tout $k \in 1, \ldots, n$, $1 = \sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}}$, montrer que $n^2 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$.
2. Préciser les cas d'égalité.

Exercice 3 — Sur l'espace des matrices.

1. Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par
$$\Phi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^\top B)$$
est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\big(\mathrm{Tr}(AB + BA)\big)^2 \leqslant 4\mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(B^2)$.

Orthogonalité, projection, distance à un sous-espace vectoriel

Exercice 4 — Orthogonalisation explicite. On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 1, 1)$ et $w = (-1, 1, 0)$. Vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer la base orthonormée issue de la base (u, v, w) par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

Exercice 5 — Projections sur des sous-espaces orthogonaux. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 0, -1), (-1, -1, 1, 1)\big)$.

1. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $E^\perp$.
2. Soit $u = (1, 2, -1, -2) \in \mathbb{R}^4$. Décomposer u en la somme d'un élément de E et d'un élément de $E^\perp$. Vérifier le théorème de Pythagore sur cette décomposition.

Exercice 6 — Dans l'espace des polynômes. Soit Φ l'application définie par :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) \end{cases}.$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire.
2. Soit $F = \mathrm{Vect}(1+X+X^2, 1-X+X^2)$. Déterminer $F^\perp$ (pour la relation d'orthogonalité définie par le produit scalaire Φ).

Exercice 7 — Représentation matricielle d'une symétrie. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x+y-z=0$.

Exercice 8 — Familles obtusangles. Soit $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$. On va montrer que nécessairement, il existe deux indices $i \neq j$ tels que

$$\langle x_i, x_j \rangle \geq 0;$$

autrement dit, les angles formés par les couples (x_i, x_j) ne peuvent pas tous être obtus. La preuve se fait par récurrence sur n.

1. Établir la propriété pour $n = 1$.
2. Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$. Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$. Soit $x_1, x_2, \dots, x_{n+3}$ des vecteurs de E, et supposons que :

$$\forall i,j,\ 1 \leq i,j \leq n+2, \quad i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle < 0.$$

   (a) Justifier que $x_1, \dots, x_{n+3}$ sont tous non nuls.
   (b) Soit $F = \left(\mathrm{Vect}(x_{n+3})\right)^\perp$. Quelle est la dimension de F ? Justifier que, pour tout $i \in 1, \dots, n+2$, il existe y_i dans F et λ_i dans $\mathbb{R}$ tel que $x_i = y_i + \lambda_i x_{n+3}$. Montrer de plus que λ_i est strictement négatif.
   (c) Montrer que pour tout i, j dans $1, \dots, n+2$, $\langle y_i, y_j \rangle < 0$. Conclure.

Exercice 9 — Sous-espaces orthogonaux, projections, symétries. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\right\} \bigcap \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y+z-t = 0\right\}.$$

1. Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.
4. Calculer $d(u, F)$ où $u = (1,2,3,4)$.

Exercice 10 — Encore un produit scalaire sur les polynômes. Soit $n \geqslant 3$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer qu'en posant pour tout $P \in E$ et tout $Q \in E$, $\Phi(P,Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, on définit un produit scalaire sur E.
2. En l'interprétant géométriquement, calculer la quantité

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \left(t^3 - (at^2+bt+c)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Exercice 11 — Distances à des sous-espaces de matrices. Soit $n \geqslant 1$. On munit l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$ (voir l'exercice 3).

1. Montrer que les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (matrices symétriques) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques) sont supplémentaires et orthogonaux.

2. Calculer la distance à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
4. Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

Endomorphismes remarquables d'un espace Euclidien

Exercice 12. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 — Adjoint d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^\top N)$. Soit A et B deux matrices fixées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$\begin{aligned} u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto AMB. \end{aligned}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'endomorphisme adjoint.

Exercice 14 — Applications qui conservent les distances. Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit f une application de E dans E vérifiant $f(0) = 0$ et qui conserve les distances :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1. Montrer que f conserve les normes : pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
2. Montrer que f conserve le produit scalaire : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E, puis que pour tout $x \in E$
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i).$$
4. En déduire que f est linéaire, et que c'est un automorphisme orthogonal de E.

Exercice 15 — Majoration de la trace. Soit $A \in \mathcal{O}(n)$. Montrer que $|\,\mathrm{Tr}(A)| \leqslant n$, avec égalité si et seulement si $A = \pm I_n$.

Réduction des matrices symétriques réelles

Exercice 16 — Calculs explicites. La matrice suivante est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Même question avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A + A^\top$ est nilpotente, alors A est antisymétrique.

Exercice 18 — Racines de matrices symétriques. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.
2. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont positives.