Problème 6 – Polynômes de Bernstein et théorème de Stone-Weierstrass

A faire pour le 2 mai 2025

Dans tout le problème, $[a, b]$ désigne un intervalle réel avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. L'objectif est de démontrer le résultat suivant :
Théorème de Stone-Weierstrass : Pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f.

Pour cela, nous commençons par définir la notion de convergence uniforme dans la partie I en présentant quelques résultats classiques. Ensuite, la partie suivante introduit les polynômes de Bernstein qui seront utiles dans la démonstration du théorème de Stone-Weierstrass à la partie III. Enfin, la dernière partie présente une application du théorème de Stone-Weierstrass.

Partie I – Norme infinie et convergence uniforme

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

On rappelle par exemple que si f est continue sur $[a, b]$, alors elle est bornée sur $[a, b]$ et donc on peut définir $\|f\|_\infty$ pour toute fonction continue.
De plus, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions bornées sur $[a, b]$ (c'est-à-dire que chaque f_n est bornée), et si f est une fonction bornée sur $[a, b]$, on dit que :

- (f_n) converge simplement vers f si pour tout $x \in [a, b]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$;
- (f_n) converge uniformément vers f si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur $[a, b]$, et soit f est une fonction bornée sur $[a, b]$. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge simplement vers f.

2. On considère la suite de fonction (f_n) définies par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{si } x \leqslant \dfrac{1}{n} \end{cases} \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
   (b) Est-ce que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle ?
   (c) Si une suite de fonctions converge simplement, peut-on en déduire qu'elle converge uniformément ?

Partie II – Polynômes de Bernstein

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $R_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

1. Prouver les trois égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} R_{n,k}(x) = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} k R_{n,k}(x) = nx,$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) R_{n,k}(x) = n(n-1)x^2.$$

2. En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 R_{n,k}(x) = nx(1-x).$$

Partie III – Approximation uniforme

Soit f une application définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) R_{n,k}(x).$$

On dit que les $B_n(f)$ sont les **polynômes de Bernstein** de f.
On va montrer que la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
On se donne $\varepsilon > 0$.

1. Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [0,1]^2, \quad |y - x| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \epsilon.$$

2. Montrer que :

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) R_{n,k}(x).$$

3. Soit x un élément de $[0,1]$. On note :

$$A = \left\{ k \in \{0, \ldots, n\}, \ \left| x - \frac{k}{n} \right| \leq \alpha \right\}.$$

Soit B le complémentaire de A dans $\{0, \ldots, n\}$.

(a) Montrer que :

$$\sum_{k\in A}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|R_{n,k}(x)\leq\varepsilon.$$

(b) Prouver :

$$\alpha^2\sum_{k\in B}R_{n,k}(x)\leq\sum_{k\in B}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2R_{n,k}(x)\leq\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2R_{n,k}(x)\leq\frac{1}{4n}.$$

(c) Prouver que :

$$\sum_{k\in B}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|R_{n,k}(x)\leq\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

(d) Montrer finalement que :

$$\|f-B_n(f)\|_\infty\leq\varepsilon+\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

4. En déduire que la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

5. Montrer plus généralement le théorème de Weierstrass :

   Toute application g continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Partie IV – Problème des moments

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On suppose que pour tout $k\geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\mathrm{d}t=0$.
L'objectif est de montrer que f est la fonction nulle.

1. Montrer que pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)f(t)\mathrm{d}t=0$.

2. Soit $\varepsilon>0$ et soit $P_\varepsilon\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\|f-P_\epsilon\|\leqslant\epsilon$. (ce polynôme existe d'après le théorème de Stone-Weierstrass).

   (a) Justifier que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\left(f(t)-P_\epsilon(t)\right)$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t=0$.

   (c) En déduire enfin que f est la fonction nulle.