

Problème 5 – Interpolation de Lagrange

A faire pour le 28 avril 2025

L'objectif est de démontrer le résultat suivant connu sous le nom d'« interpolation de Lagrange » :

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que pour tout $k \neq l$, $x_k \neq x_l$.

Soit $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$P(x_k) = y_k.$$

Partie I – Preuve de l'existence

On considère $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout $k \neq l$, $x_k \neq x_l$.

On considère par ailleurs $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on définit le polynôme $L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$.

1. Montrer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $L_i(x_i) = 1$.

2. Montrer que pour tout $j \neq i$, $L_i(x_j) = 0$.

3. On pose $L(X) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(X)$.

(a) Montrer que $L \in \mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer que pour tout

$$k \in \{0, \dots, n\}, \quad L(x_k) = y_k.$$

(c) Conclure.

4. **Exemple :**

On considère le cas $n = 3$ avec $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-1; 3; 4; 6)$ et $(y_0, y_1, y_2, y_3) = (2; 2; -3; 0)$.

Calculer les polynômes L_i et le polynôme L apparaissant dans la preuve de l'existence (il n'est pas nécessaire de simplifier les calculs).

Partie II – Preuve de l'unicité

Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout $k \neq l$, $x_k \neq x_l$. Soit $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_k) = y_k$ et $Q(x_k) = y_k$.

1. Montrer que le polynôme $P - Q$ possède au moins $n + 1$ racines.
2. En déduire que $P = Q$.

Partie III – Preuve par l’algèbre linéaire

L’objectif de cette partie est de montrer que l’existence peut se déduire de l’unicité en utilisant des notions d’algèbre linéaire. On admet donc le résultat prouvé à la partie II mais pas celui de la partie I. Nous allons prouver qu’il existe un polynôme interpolateur en évitant d’avoir à définir les L_i tels que dans la partie 1.

On considère $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout $k \neq l$, $x_k \neq x_l$.

1. Montrer que l’application $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto \begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} \end{cases}$ est une application linéaire.
2. Justifier que Φ est injective.
3. En déduire que Φ est un isomorphisme.
4. Conclure.