Problème 4 – Théorème de d'Alembert-Gauss

A faire pour le 4 avril 2025

On propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss qui assure que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $p > 0$.
L'objectif est de montrer que $\inf\{|P(z)|\,;z \in \mathbb{C}\} = 0$ et que cette borne inférieure est en fait un minimum (c'est-à-dire que l'inf est atteint).

Nous noterons :

$$\mathcal{P} = \{|P(z)|\,; z \in \mathbb{C}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{P}$ admet une borne inférieure notée α.

2. Soit $r > 0$. Montrer que pour tout nombre complexe z de module r, on a :

$$|P(z)| \geq |a_p|r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k|r^k.$$

3. En déduire que :

$$\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty.$$

4. Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et un nombre complexe z_0 tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} |P(z_n)| = |P(z_0)| = \alpha.$$

5. On va montrer par l'absurde que $\alpha = 0$.

   (a) Soit $Q = \frac{P(X+z_0)}{P(z_0)}$. Montrer que :

   $$\inf\{|Q(z)|\,; z \in \mathbb{C}\} = |Q(0)| = 1.$$

   (b) Montrer que Q peut se mettre sous la forme :

   $$Q = \sum_{k=q+1}^{p} b_k X^k - b_q X^q + 1, \quad \text{où } b_q \neq 0 \text{ et } 1 \leq q \leq p.$$

   (c) On note $b_q = \rho e^{-i\theta}$ et $z = re^{i\theta/q}$. Montrer que pour r assez petit :

   $$|Q(z)| - 1 \leq -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} |b_k|r^k.$$

6. Conclure.