# Problème 3 – Équations différentielles d'ordre deux

A faire pour le 21 mars 2025

## Partie I – Équations différentielles réelles

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ :

$$(E_1) : \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

**Rappel : une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution de $(E_1)$ si, par définition, $f$ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$.**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{rx}$ (avec $r \in \mathbb{R}$). Montrer que $f$ est solution de $(E_1)$ si, et seulement si,
$$ar^2 + br + c = 0.$$
Dans toute la suite, on note $P(X) = aX^2 + bX + c$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

**Cas $\Delta > 0$**

2. Supposons que $P$ admette deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$. Montrer que toute fonction de la forme
$$f(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \qquad (\text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$
est solution de $(E_1)$.

3. Réciproquement, supposons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit solution de $(E_1)$ (en faisant toujours l'hypothèse que $\Delta > 0$).
On pose alors $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-r_1x}f(x)$.
   (a) Montrer que $g$ vérifie
   $$ag'' + (2ar_1 + b)g' = 0$$
   (b) En déduire l'expression de $g(x)$ puis en déduire ensuite que $f$ est de la forme :
   $$f(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \qquad (\text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

4. Finalement, si $\Delta > 0$, quel est l'ensemble des solutions de $(E_1)$ ?

**Cas $\Delta = 0$**

5. Supposons que $P$ admette une racine réelle double $r_0$. Montrer que toute fonction de la forme
$$f(x) = C_1xe^{r_0x} + C_2e^{r_0x} \qquad (\text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$
est solution de $(E_1)$.

6. Réciproquement, supposons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit solution de $(E_1)$ (en faisant l'hypothèse $\Delta = 0$). En posant $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-r_0 x} f(x)$ et en raisonnant comme à la question 3, montrer que $f$ est de la forme

$$f(x) = C_1 x e^{r_0 x} + C_2 e^{r_0 x} \qquad (\text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

7. **Application :** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 3y' - 6y = 0$ et l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 0$.

# Partie II – Équations différentielles complexes

**Définition :** Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, on note $\mathrm{Re}(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \mathrm{Re}(f)(x) + i\mathrm{Im}(f)(x).$$

On dit que $f$ est dérivable en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en $x_0$. De plus, on définit :

$$f'(x_0) = (\mathrm{Re}(f))'(x_0) + i\,(\mathrm{Im}(f))'(x_0)$$

Enfin, on dit que $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ si $f$ est dérivable en tout point $x_0 \in I$.

**Remarque : Attention, la définition que l'on donne concerne des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. En particulier, nous n'avons pas donné de sens à la dérivée de fonctions définies sur $\mathbb{C}$.**

1. Montrer avec cette définition que si $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\lambda x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$.

On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle suivante où $a, b, c \in \mathbb{C}$ :

$$(E_2) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0.$$

2. En vous inspirant de la première partie, montrer que si $b^2 - 4ac \neq 0$ et si l'on note $r_1$ et $r_2$ les deux racines complexes de $aX^2 + bX + c = 0$, l'ensemble des solutions de $(E_2)$ est :

$$\left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C}\right\}.$$

# Partie III – Retour sur le cas réel

Il reste maintenant à traiter le cas $\Delta < 0$. On suppose donc que $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4ac < 0$. On note $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées de $aX^2 + bX + c$. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ :

$$(E_1) : \qquad a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0.$$

1. On considère une solution $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de $(E_1)$.

   (a) Justifier succinctement qu'il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ tels que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

   (b) Montrer ensuite qu'il existe $\tilde{C}_1 \in \mathbb{R}$ et $\tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$ telles que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \tilde{C}_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \tilde{C}_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

2. Réciproquement, montrer que toute fonction de la forme

   $$f(x) = \tilde{C}_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \tilde{C}_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

   avec $\tilde{C}_1 \in \mathbb{R}$ et $\tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$ est solution de $(E_1)$.

3. **Application :** Résoudre l'équation $y'' + y' + y = 0$ en donnant les solutions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

# Partie IV – Équations d'ordre deux non homogènes

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ des réels et $d : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I$. On considère l'équation différentielle

   $$(E_3) : \qquad \forall x \in I, \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x).$$

   Supposons que $f_0$ est une solution de $(E_3)$.
   Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $I$.
   Montrer que $f$ est solution de $(E_3)$ si, et seulement si, $f - f_0$ est solution de

   $$ay'' + by' + cy = 0.$$

2. **Application :** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

   $$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^3$$

   Indication : on pourra commencer par chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré trois étant donné que le second membre est un polynôme de degré trois.