

Problème 2 – Polynômes de Tchebychev et application

A faire pour le 21 février 2025

Partie I – Polynômes de Tchebychev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Ces polynômes sont appelés **polynômes de Tchebychev de première espèce** et sont souvent utilisés pour établir des résultats d'approximation de fonctions.

1. Expliciter T_2 et T_3 .
2. Déterminer le degré du polynôme T_n ainsi que son coefficient dominant.
3. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.
4. En déduire les valeurs de $T_n(1)$ et $T'_n(1)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. Combien y en a-t-il ? Qu'en déduire ?

Partie II – Calcul de $\zeta(2)$

La fonction zeta de Riemann, notée ζ est définie formellement par $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. L'objectif de cette partie est de calculer $\zeta(2)$. Autrement dit, on cherche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n,$$

où

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

1. Réaliser la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)}$.
2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ et montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

3. Établir que la suite (S_n) converge. On note ℓ sa limite.

4. On introduit

$$S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

- (a) Former une relation exprimant S_{2n} en fonction de S_n et S'_n .
- (b) En déduire que (S'_n) converge et exprimer sa limite ℓ' en fonction de ℓ .

Nous allons maintenant poursuivre l'étude en calculant ℓ' à l'aide des polynômes de Tchébychev :

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note :

$$x_k = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right),$$

les racines de T_n .

- (a) Établir l'égalité :

$$\frac{T'_n(X)}{T_n(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - x_k}.$$

- (b) En déduire :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - x_k} = n^2,$$

puis les valeurs des sommes :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{(2k-1)\pi}{4n} \right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \left(\frac{(2k-1)\pi}{4n} \right)}.$$

6. (a) Justifier, par un argument de convexité, que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sin x \leq x \leq \tan x.$$

- (b) En déduire un encadrement de S'_n puis les valeurs de ℓ' et ℓ .