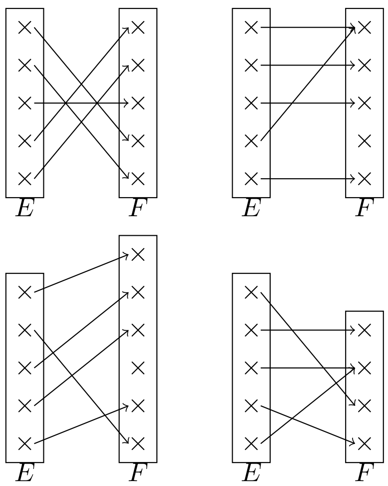
TD5 – Applications 2

1 Injections, bijections, surjections

Exercice 1. Représentation imagée des applications Les dessins ci-dessous représentent des applications de E dans F. Dans chacun des cas, dire si l'application est injective, surjective, bijective ou ni injective, ni surjective.



Exercice 2. Définitions : injections - surjections
Soit E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Donner la définition (avec les quantificateurs) de f est injective. Illustrer cette définition par un exemple de votre choix.
2. Donner la définition (avec les quantificateurs) de f est surjective. Illustrer cette définition par un exemple de votre choix.

Exercice 3. Exercice élémentaire
L'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto 2n + 3$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Ni injective, ni surjective ? Justifier soigneusement votre réponse.

Exercice 4. Importance des ensembles de départ et d'arrivée Soit $f : x \mapsto \cos(x)$ une formule d'association (à ce stade f n'est pas une application car nous ne connaissons pas les ensembles de départ et d'arrivée).
Dans chacun des cas suivants, choisir des ensembles A et B pour que $f : A \to B$ soit bien définie comme application et tels que $f : A \to B$ soit

1. une application ni injective, ni surjective ;
2. une application injective et non surjective ;
3. une application surjective et non injective ;
4. une bijection.

Exercice 5. Importance des ensembles de départ et d'arrivée (2)
On considère l'application $f : E \to F$ définie par $f(x) = x^2$ où E et F sont donnés ci-dessous. Dans chacun des cas faire un dessin adéquate, indiquer si f est ou non injective, surjective, bijective. Si elle est bijective, préciser la bijection réciproque). Justifier.
(a) $E = \{0, 1, 2\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, (b) $E = \{-1, 0, 1, 2\}$ et $F = \{0, 1, 2, 4\}$, (c) $E = \mathbb{N}$, $F = \mathbb{N}$, (d) $E = \mathbb{Z}$, $F = \mathbb{Z}$, (e) $E = F = \mathbb{R}_+$.

Exercice 6. Pour chaque application ci-dessous, déterminer à l'aide des tableaux de variations un intervalle I maximal contenant 0 tel que l'application soit injective.
(a) $f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$
(b) $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$
(c) $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$.
Modifier ensuite l'ensemble d'arrivée pour que ces applications soient bijectives.

Exercice 7. Montrer que les applications suivantes ne sont pas injectives.

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}\ n \mapsto |n + 1| + 2$
2. $f : E \to F$ définie par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ pour $E = F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et les images des éléments de la première ligne sont donnés par les éléments de la seconde ligne.
3. $f : E \to F$ définie par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ avec la même convention
4. $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[\quad x \mapsto |x - 1| + 2$
5. $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[\quad x \mapsto \sqrt{|x - 1|} + 3$
6. $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[\quad x \mapsto (3x + 1)^2$
7. $f : \mathbb{R} \to [2, +\infty[\quad x \mapsto 2 + e^{(3x+1)^2}$
8. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + 4y + 1)$
9. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x + 2y + 1$

Exercice 8. Montrer que les applications suivantes ne sont pas surjectives.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ n \mapsto n + 1$
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}\ n \mapsto |n + 1| + 2$
3. $f : E \to F$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ pour $E = F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et les images des éléments de la première ligne sont donnés par les éléments de la seconde ligne.
4. $f : E \to F$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ avec la même convention
5. $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[\quad x \mapsto \sqrt{x + 1}$

6. $f : [-1, +\infty[\to [0, +\infty[\quad x \mapsto \sqrt{x+1}$
7. $f : \mathbb{R} \to [2, \infty[\quad x \mapsto 2 + e^{3x+1}$
8. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2 \quad n \mapsto (n, n+1)$
9. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x + 2y + 1, 2x + 4y)$

Exercice 9. Montrer que l'application $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \longmapsto \dfrac{z+i}{z-1} \in \mathbb{C}$ est injective.

Exercice 10. Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer leur bijection réciproque f^{-1}.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*\ n \mapsto n + 1$
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}\ n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n+1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$
3. $f : E \to F \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ pour $E = F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et les images des éléments de la première ligne sont donnés par les éléments de la seconde ligne.
4. $f : E \to F \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ avec la même convention
5. $f : [-1, +\infty[\to [0, +\infty[\quad x \mapsto \sqrt{x+1}$
6. $f : \mathbb{R} \to [2, +\infty[\quad x \mapsto 2 + e^{3x+1}$
7. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, 3y + 1)$
8. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x + 2y + 1, x - 3y)$

Exercice 11. Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer s'il s'agit d'une injection, d'une surjection et/ou d'une bijection. Dans le cas échéant, déterminer sa bijection réciproque.

1. Soit E un ensemble non vide,
   $Id_E : E \to E,\ x \mapsto x.$
2. $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1,$
   $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n + 1.$
3. $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y)$;
   $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x+y, x-y, x+2y)$;
4. $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^2, (t-1)^2)$;
   $h_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^2 - t, t - \frac{1}{t}).$
5. $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times [0, +\infty),\ (x, y) \mapsto (x + y^2, y^2).$
6. $\phi :]0, +\infty) \times [0, 2\pi[\to \mathbb{C}^*,\ (r, \theta) \mapsto re^{i\theta}.$

Exercice 12.

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \to (x, y)$. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
2. Déterminer, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, l'ensembe $f^{-1}(f(\{(x, y, z)\}))$. L'écrire sous forme d'un produit cartésien.

Exercice 13. Soit $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de E et B une partie de F.

1. Rappeler la relation entre $f^{-1}(f(A))$ et A. Rappeler aussi pourquoi ces deux ensembles ne sont pas égaux en général.
2. Montrer par contre que si f est injective, alors $f^{-1}(f(A)) = A$.
3. Rappeler la relation entre $f(f^{-1}(B))$ et B. Rappeler aussi pourquoi ces deux ensembles ne sont pas égaux en général.
4. Montrer par contre que si f est surjective, alors $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 14. *Application de E dans lui-même*
Soit E un ensemble non vide et soit une application $f : E \to E$

1. Montrer que si $f(f(E)) = E$, alors f est surjective.
2. Montrer que si $f \circ f$ est bijective, alors f aussi.

2 Produits cartésiens

Exercice 15. On considère les applications f et g définies par

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* & \to & \mathbb{Z} \\ (m, n) & \mapsto & nm \end{cases} \quad g : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ n & \longmapsto & (n, n+1) \end{cases}$$

Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}(\{(0, 0)\})$. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Justifier. Même question pour l'application g.

Exercice 16. On considère les applications f et g définies par :

$$f : \begin{cases} [0, 1]^2 & \to & [0, 1] \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{cases} \quad g : \begin{cases} [0, 1] & \to & [0, 1]^2 \\ x & \mapsto & \left(x, \frac{1}{x+1}\right) \end{cases}$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. L'application g est-elle injective ? surjective ?

Exercice 17. On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & m + n \end{cases}$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. On note $\mathcal{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et $\mathcal{I} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des entiers naturels impairs. Démontrer que $f(\mathcal{P} \times \mathcal{P}) = \mathcal{P}$.
3. Déterminer $f(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$.
4. Déterminer $f^{-1}(\mathcal{P})$.

Exercice 18. On considère l'application $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ définie par $\phi((p, q)) = (p/q, p^2/q^2)$.

1. On pose $A = \{(1, 2)\}$ et $B = \{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* | q = 2p\}$. Déterminer $\phi(A)$ et $\phi(B)$.

2. L'application ϕ est-elle injective ?
3. On pose $C = \{(1,1)\}$ et $D = \{(1, \frac{1}{2})\}$. Déterminer $\phi^{-1}(C)$ et $\phi^{-1}(D)$.
4. L'application ϕ est-elle surjective ?

3 Composition

Exercice 19. *Révisions de cours*
Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $i : E \to F$ et $s : F \to G$ deux applications. Démontrer que :

1. Si $s \circ i$ est injective alors i est injective.
2. Si $s \circ i$ est surjective, alors s est surjective
3. Si $s \circ i$ est surjective et s est injective alors i est surjective.
4. Soient $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux applications. Que peut-on dire de g si $f \circ g = Id_E$?

Exercice 20.
1. Soit $f\ :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$ et $g : \mathbb{R} \to]-1,1[, x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$. Vérifier que f et g sont des applications bien définies puis déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. En déduire que $\mathbb{R}$ et $]-1,1[$ sont en bijection.
2. En utilisant la fonction tangente, donner une autre preuve du résultat précédent.

4 Cardinalité et dénombrabilité

Exercice 21. On note $[[1,n]] = \{k \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leqslant k \leqslant n\}$.
Soit n, p deux entiers naturels non nuls et $f : [[1,n]] \to [[1,p]]$ une application.

1. **Conjecture**
   (a) A votre avis si f est injective, que peut-on en déduire sur n et p ?
   (b) Même question si f est surjective ?
   (c) Et si f est bijective ?
2. **Application**
   (a) Alice met 8 chaussettes au hasard dans 7 tiroirs. Montrer qu'il existe au moins un tiroir contenant 2 chaussettes.
   (b) Bernard a renversé des boules de trois couleurs dans le noir. Quel est le nombre minimal de boules qu'il doit ramasser pour être sûr d'en avoir au moins 3 de la même couleur ?

Exercice 22.

1. Montrer que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont en bijection.
2. On considère l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $\varphi(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair et $\varphi(n) = -\frac{n+1}{2}$ sinon. Montrer que φ est bijective.
3. On considère l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z}^*$ définie par $f(p,n) = 2^p(2n+1)$ pour (p,n) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$. Montrer que f est bijective.

Exercice 23. Soit f et g les deux applications ainsi définies :

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q} \quad (p,q) \mapsto r = \frac{p}{q}$$

$$\begin{array}{llll} g : & \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & & \\ & r \mapsto (p,q) & & \text{où } p/q \text{ irreductible} \\ & & & \text{et } \frac{p}{q} = r. \end{array}$$

1. Expliquer pourquoi g est bien une application.
2. A-t-on $(f \circ g)(r) = r$ pour tout r dans $\mathbb{Q}$?
3. A-t-on $(g \circ f)((p,q)) = (p,q)$ pour tout (p,q) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$?
4. Les applications f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 24. À l'aide des deux exercices précédents construire une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$.

5 Problèmes - pour aller plus loin

Exercice 25. Soient n, p deux entiers naturels non nuls et $f : [[1,n]] \to [[1,p]]$ une application. On cherche à démontrer que :
Conjecture

a) Si f est injective, alors $n \leqslant p$.
b) Si f est surjective, alors $n \geqslant p$.
c) Et si f est bijective, alors $n = p$.

Démonstration de (a)
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ de la propriété $P(n)$:
"pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour toute application $f : [[1,n]] \to [[1,p]]$, si f est injective alors $n \leq p$."

1. Montrer l'initialisation.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $P(n)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons il existe une application injective f de $[[1,n+1]]$ dans $[[1,p]]$
   (a) Montrer que $p \geqslant 2$.
   (b) 1^{er} **cas :** On suppose que $f(n+1) = p$. Montrer que $f([[1,n]]) \subset [[1,p-1]]$.
   (c) Expliquer pourquoi l'application
   $$\tilde{f} : [[1,n]] \to [[1,p-1]] \quad x \mapsto f(x)$$
   est donc bien définie.
   (d) Montrer que $\tilde{f}$ est injective.
   (e) Que peut-on en déduire sur $n+1$ et p ?

   (f) **Cas général :** En composant f par une transposition bien choisie revenir au 1er cas.

3. Conclure

Démonstration de (b) Soit n, p des entiers naturels non nuls et $f : [[1, n]] \to [[1, p]]$ une application surjective.

1. Justifier que pour tout $y \in [[1, p]]$ $f^{-1}(\{y\})$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}^*$.
2. Rappeler la définition du plus petit élément (ppe) d'une partie A de $\mathbb{N}$.
3. Rappeler la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.
4. En déduire que $y \mapsto ppe(g^{-1}(\{y\})$ définit bien une application de $[[1, p]] \to [[1, n]]$.
5. Calculer $f \circ g(x)$ pour tout x.
6. Que peut-on en déduire sur l'injectivité de g ?
7. Conclure.

Exercice 26. Soit E un ensemble non vide. Soit A et B deux parties de E. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A,\ X \cap B) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que f soit surjective.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective.

Exercice 27. Soit E un ensemble non vide.

1. Montrer qu'il existe une application $f : E \mapsto \mathcal{P}(E)$ injective.
2. L'objectif de la question est de montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une application $g : E \mapsto \mathcal{P}(E)$ surjective. On considère alors l'ensemble $F = \{x \in E \mid x \notin g(x)\}$ et $y \in E$ tel que $g(y) = F$.

   (a) Peut-on avoir $y \in F$?

   (b) Peut-on avoir $y \notin F$?

   (c) Conclure.