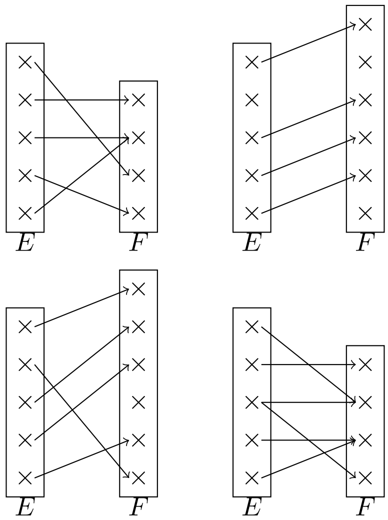
TD4 – Applications 1

Dans toute la feuille, si $a \in \mathbb{Z}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des multiples de a.

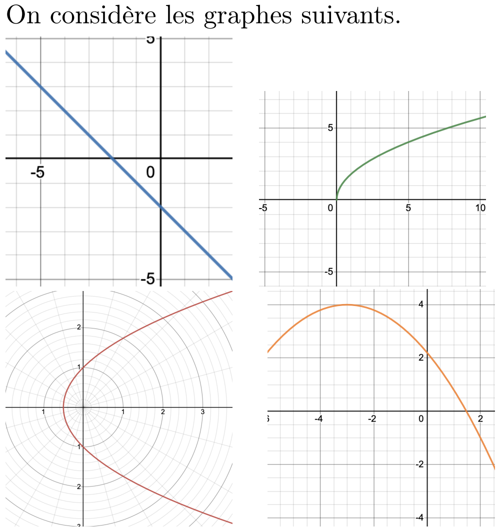
Applications, images directes et réciproques

Exercice 1. Représentation imagée d'applications

1. Dans chacun des cas suivants, dire si le dessin est (ou n'est pas) la représentation graphique d'une application de E dans F. Justifier.



2. On considère les graphes suivants.



Lesquels définissent des applications de l'intervalle représenté en axe des abscisses dans l'intervalle représenté en axe des ordonnées ?

Exercice 2. Ecriture - basique On considère l'application f de l'ensemble E des étudiants dans l'ensemble $\{0, ..., 20\}$ des notes. Ainsi, si x désigne un étudiant, $f(x)$ désigne sa note. On désigne par A une partie stricte de E et a et b deux éléments distincts de E.

1. Parmi les expressions suivantes indiquer celles qui n'ont pas de sens ($\times$), entourer celles qui sont des ensembles et exprimer celles qui ont du sens en français à l'aide des notions d'ensemble, de note et d'élève.

   (a) $f(a)$
   (b) $f(\{a\})$
   (c) $f(a, b)$
   (d) $f(20)$
   (e) $f(\{20\})$
   (f) $f(\{a, b\})$
   (g) $f^{-1}(\{20\})$
   (h) $f^{-1}(\{a, b\})$
   (i) $f^{-1}(20)$
   (j) $f^{-1}(\{19, 20\})$

2. Parmi les expressions suivantes indiquer celles qui n'ont pas de sens ou sont absurdes ($\times$) et exprimer celles qui ont du sens à l'aide des notions d'ensemble, de note et d'élève.

   (a) $f(a) = 20$
   (b) $f(20) = a$
   (c) $f(\{a\}) = E$
   (d) $f(\{a\}) = 20$
   (e) $f(\{a\}) = \{20\}$
   (f) $f(\{a, b\}) = 20$
   (g) $f^{-1}(\{20\}) = \emptyset$
   (h) $f^{-1}(\{20\}) = \{a\}$
   (i) $f^{-1}(\{20\}) = E$
   (j) $f^{-1}(20) = a$
   (k) $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$
   (l) $f^{-1}(\{0\}) = \{a, b\}$

3. Écrire en utilisant les images directes et réciproques les ensembles suivants : (a) L'ensemble des notes obtenues par les étudiants du groupe A. (b) L'ensemble des élèves ayant eu plus de 15. (c) L'ensemble des élèves du groupe A ayant eu plus de 15.
4. Soient A et B des parties de E (des groupes d'étudiants). Décrire en français, en utilisant les notions d'ensemble, d'élève et de note, les ensembles suivants : (a) $f(A)$, (b) $f(A) \cap f(B)$ (c) $f(A \cap B)$.
5. Décrire en français en utilisant seulement les notions de notes et d'élèves les ensembles suivants :
   (a) $f^{-1}(\{0, 1, 2\} \cup \{5, 6, 7\})$,
   (b) $f^{-1}(\{10, .., 15\}) \cap f^{-1}(\{14, .., 20\})$
   (c) $f^{-1}(\{0, .., 7\}) \cap A$.

Exercice 3. Utilisation des définitions
Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = \cos(n\pi/2)$. Déterminer les ensembles suivants :

1. $f(\{-1, 0, 1, 2\})$,
2. $f(4\mathbb{Z})$,
3. $f^{-1}(\{0\})$,
4. $f^{-1}(\{-1, 1\})$.

Exercice 4. Détermination graphique
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^2$

1. Déterminer le tableau de variation et tracer le graphe de f.
2. Déterminer les ensembles
   (a) $f([-4,-1])$, $f([-4,2])$, $f(]-2,3[)$.
   (b) $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{0,1\})$
   (c) $f^{-1}(]-\infty,3])$, $f^{-1}([-2,+\infty[)$, $f^{-1}(]-2,0]\cup[1,5[)$.

Exercice 5. Détermination directe
Soit $g\ :\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}\quad m\mapsto 2m+1$

1. Déterminer $g(\mathbb{N})$ et $g(5\mathbb{N})$.
2. Déterminer $g^{-1}(\{24\})$, $g^{-1}(\{24,42\})$, $g^{-1}(\{2021,2022,2023,2024\})$.
3. (*) Montrer que $g^{-1}(3\mathbb{N})=\{3k+1\mid k\in\mathbb{N}\}$.

Exercice 6. Avec un produit cartésien
Soit $f\ :\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\to\mathbb{Z}\qquad (m,n)\mapsto nm$
Déterminer les ensembles suivants :

1. $f(\{(5,3)\})$;
2. $f(\{2,4\}\times\{1,2\})$;
3. $f^{-1}(\{0\})$
4. $f^{-1}(\{3\})$;
5. $f(\{2\}\times\mathbb{Z}^*)$;
6. $f(7\mathbb{Z}\times(3\mathbb{Z}\setminus\{0\}))$.

Exercice 7. Utilisation des définitions Soit $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ définie par, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $f(n)=e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

1. Déterminer $f(\{-1,0,1,2\})$.
2. Déterminer $f(3\mathbb{Z})$.
3. Déterminer $f(4\mathbb{Z})$.
4. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
5. Déterminer $f^{-1}(\{-1,1\})$.

Exercice 8. Détermination graphique
Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc}[-\pi,\pi] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \cos(x)\end{array}\right.$.

1. Déterminer le tableau de variation et tracer le graphe de f.
2. Déterminer les ensembles
   (a) $f([-\pi,-\frac{\pi}{2}])$, $f([-\pi,2])$, $f(]-2,3[)$.
   (b) $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$.
   (c) $f^{-1}(]-\infty,3])$, $f^{-1}([-2,+\infty[)$, $f^{-1}(]-2,0]\cup[1,5[)$.

Exercice 9. Soit $f\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}^* & \to & \{-1;1\}\times\mathbb{N}\\ m & \mapsto & (\dfrac{m}{|m|},m)\end{array}\right.$.

1. Déterminer $f(\mathbb{N}^*)$ et $f(5\mathbb{Z}^*)$.
2. Déterminer $f^{-1}(\{-1\}\times\mathbb{N}^*)$ et $f^{-1}(\{-1\}\times 2\mathbb{N})$.

Exercice 10. Soit les applications $f\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}\\ n & \mapsto & 2m+1\end{array}\right.$ et $g\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q}\\ m & \mapsto & \frac{m-1}{2}\end{array}\right.$.

1. Les applications $f\circ g$ et $g\circ f$ sont-elles bien définies ? Si oui que valent-elles ?
2. Proposez une modification des ensembles de départ et/ou d'arrivée de g permettant de définir les deux applications composées.
3. Déterminer l'application $f^{(2022)}=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{2022\text{ fois}}$.

Exercice 11. On pose $E=\{1,2,3,4,5\}$.

1. Montrer que $\mathbf{t}_{1,2}\circ\mathbf{t}_{2,3}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}$, où les éléments de l'ensemble de départ sont disposés dans la première ligne et leurs images respectives dans la seconde ligne.
2. Calculer de même $\mathbf{t}_{2,3}\circ\mathbf{t}_{1,2}$
3. Montrer que l'application $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$ peut s'écrire comme la composée de transpositions.

Exercice 12. *Révisions du cours 1*
Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soient A,A' des parties de E et B,B' des parties de F.

1. Indiquer si les propositions sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses donner un contre-exemple.
   (a) Si $A\subset A'$ alors $f(A)\subset f(A')$
   (b) Si $f(A)\subset f(A')$, alors $A\subset A'$
   (c) $f(A\cup A')=f(A)\cup f(A')$
   (d) $f(A\cap A')\subset f(A)\cap f(A')$
   (e) $f(A\cap A')\supset f(A)\cap f(A')$
2. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont vraies démontrez les.
   (a) $B\subset B'$ ssi $f^{-1}(B)\subset f^{-1}(B')$
   (b) $f^{-1}(B\cup B')=f^{-1}(B)\cup f^{-1}(B')$
   (c) $f^{-1}(B\cap B')=f^{-1}(B)\cap f^{-1}(B')$

Exercice 13. *Révisions du cours 2*
Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soit A une partie de E et B une partie de F. Quelle relation existe-t-il parmi les ensemble suivants ? Choisir la relation la plus appropriée parmi, $\subset$, $\supset$, $=$, ou « aucune inclusion en général » et proposer des contre-exemples s'il n'y pas égalité.

1. $f(A^c)$ et $(f(A))^c$,
2. $f(A^c)$ et $f(A)$,
3. $f^{-1}(f(A))$ et A,
4. $f(f^{-1}(B))$ et B.

Composition des applications

Exercice 14. On considère les applications suivantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $h : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$. Parmi les applications suivantes, lesquels n'ont jamais de sens ? lesquelles ont toujours un sens ? Préciser leurs ensembles de départ et d'arrivée. Lesquelles peuvent avoir un sens (préciser la condition) ?

1. $f \circ g$
2. $g \circ f$
3. $h \circ f$
4. $f \circ h$
5. $h \circ g$
6. $g \circ h$
7. $f \circ f$
8. $f \circ g \circ h$
9. $h \circ f \circ g$

Exercice 15. Soit les applications $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $n \mapsto n+1$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $n \mapsto 2n$.

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$ calculer $f(2n+1)$ et $g(2n+1)$.
2. Déterminer les applications $f \circ f$ et $g \circ g$.
3. Comparer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
4. Déterminer l'application $f^{(2024)} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2024 \text{ fois}}$.
5. Déterminer l'application $(f \circ g)^{(n)} = \underbrace{(f \circ g) \circ (f \circ g) \circ \cdots \circ (f \circ g)}_{n \text{ fois}}$.

Exercice 16. Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $x \mapsto |\sin(x)|e^{-x}$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $x \mapsto \ln(2 + |x|)$.

1. Quel est l'ensemble $(h \circ g)(\{e^{\pi} - 2,\ e^{3\pi} - 2\})$?
2. Quel est l'ensemble $(h \circ g)^{-1}([2, 3])$? $(h \circ g)^{-1}([0, 1/2])$

Exercice 17. Transpositions
On pose $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, l'ensemble des entiers entre 1 et 5. On rappelle que si a et b sont des éléments de E la transposition $\mathbf{t}_{a,b}$ est l'application qui envoie a sur b, b sur a, et laisse invariant tous les autres éléments de E. A titre d'exemple, $\mathbf{t}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, où les éléments de l'ensemble de départ sont disposés dans la première ligne et leurs images respectives dans la seconde ligne.

1. Montrer que $\mathbf{t}_{1,2} \circ \mathbf{t}_{1,2} = \mathbf{Id}_E$
2. Calculer $\mathbf{t}_{1,2} \circ \mathbf{t}_{2,3}(2)$ et $\mathbf{t}_{1,2} \circ \mathbf{t}_{2,3}(3)$
3. Calculer $\mathbf{t}_{2,3} \circ \mathbf{t}_{1,2}(2)$ et $\mathbf{t}_{2,3} \circ \mathbf{t}_{1,2}(3)$. La composition est-elle une opération commutative ?
4. Montrer que $\mathbf{t}_{1,2} \circ \mathbf{t}_{3,4} = \mathbf{t}_{3,4} \circ \mathbf{t}_{1,2}$.
5. Déterminer $\mathbf{t}_{1,2} \circ \mathbf{t}_{2,3} \circ \mathbf{t}_{1,2}(\{1, 2, 3\})$.

Exercice 18. Définition
Soit E, F, G et H des ensembles non vides.
Soit $f : E \to F$, $g : G \to H$ deux applications.

1. À quelle condition l'application $f \circ g$ est-elle bien définie ?
2. Écrire la définition de l'application $g \circ f \circ g \circ f$ avec les conditions sur E, F, G, et H pour que cette définition soit valide.
3. Même question pour la définition de l'application $f \circ g \circ f \circ g$.

Exercice 19. Composition et images (directes et réciproques)
Soit E et F deux ensembles non vides.
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Quelle application est sûrement bien définie $f \circ g$ ou $g \circ f$?
2. Soit $A \subset E$. Vérifiez qu'il y a bien égalité entre les ensembles $(g \circ f)(A)$ et $g(f(A))$.
3. Soit $B \subset G$. Donnez la définition de $(g \circ f)^{-1}(B)$. Comparez cet ensemble à l'ensemble $f^{-1}(g^{-1}(B))$.