TD 2 – Démonstrations et ensembles

Démonstrations

Exercice 1.

1. Montrer que la somme de deux nombres entiers naturels pairs est un nombre pair.
2. Montrer que la somme de deux nombres entiers naturels impairs est un nombre pair.
3. Montrer que le produit de deux nombres entiers naturels impairs est un nombre impair.
4. Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.
5. Montrer que la somme de deux nombres pairs consécutifs n'est pas divisible par 4.

Exercice 2. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 3. Démontrer que l'équation $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$ n'admet pas de solution entière.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des solutions des inéquations réelles suivantes par disjonction de cas :

1. $|x + 1| \leq |2x - 5|$
2. $|x - 3| > |3x + 6|$

Exercice 5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 11 divise $12^n - 1$

Exercice 6. Montrer que pour tout $n \geq 5$,

$$n^2 < 2^n$$

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

Exercice 8. Récurrence simple ou double ?

On considère la suite (u_n) (suite de Fibonacci) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$;
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$$

Exercice 9. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{R}, f(z) = z; \\ \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(z + z') = f(z) + f(z'); \\ \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(z \times z') = f(z) \times f(z'). \end{cases}$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et somme d'une fonction impaire.

Exercice 11. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \times f(y) - f(x \times y) = x + y.$$

Exercice 12. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f et g sont croissantes, alors $f + g$ et $g \circ f$ sont des fonctions croissantes.

Exercice 13. Montrer qu'il existe deux irrationnels a, b tels que a^b est un nombre rationnel.

Indice : Considérer le réel $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, calculer $x^{\sqrt{2}}$ et discuter suivant $x \in \mathbb{Q}$ ou $x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 14. Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 6x - 3y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 15x + 2y = 7 \\ x - 7y = 2 \end{cases}$$

Ensembles

Exercice 15.

1. Indiquer si l'ensemble proposé est écrit de manière paramétrique ou en compréhension. Indiquer si 12 et 15 appartiennent ou non à l'ensemble puis démontrez le.

(a) $A = \{12k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \quad nk = 12\}$

(c) $C = \{12k + 3 \mid k \in \mathbb{N}\}$

(d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \{12, 15\} \quad n \geq k\}$

2. Ecrire en compréhension les ensembles A et C .
3. Parmi les ensembles ci-dessus indiquer celui qui correspond à l'ensemble des multiples de 12, l'ensemble des diviseurs de 12, l'ensemble des entiers naturels dont le reste de la division euclidienne par 12 vaut 3.
4. Comment peut-on décrire en français le dernier ensemble ?

Exercice 16. Dans chaque cas, écrire l'ensemble en compréhension et/ou de manière paramétrique si cela est possible.

1. L'ensemble des multiples de 3;
2. L'ensemble des nombres dont la racine carrée est un entier naturel;
3. L'ensemble des diviseurs de 18;
4. L'ensemble des nombres premiers;
5. L'ensemble des suites croissantes;

- L'ensemble des couples de réels dont les deux coordonnées sont égales ;
- L'ensemble des nombres complexes de module égal à 1 (on pourra utiliser la forme exponentielle des nombres complexes).

Exercice 17. On définit l'ensemble

$$A = \left\{ p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q} \right\}.$$

- Montrer que $0 \in A$, $1 \in A$, $2\sqrt{2} \in A$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \in A$.
- A-t-on $\frac{1}{1-\sqrt{2}} \in A$?
- Montrer que A est stable par addition et par multiplication.
- A est-il stable par passage à l'inverse ? Et $A \setminus \{0\}$?

Exercice 18. 1. Écrire en extension et compréhension l'ensemble E des réels dont le carré vaut 1.

- Écrire en compréhension l'ensemble F des réels dont le carré est plus petit que 1.
- Justifier que $-4 \notin F$ et que $1 \in F$.
- Écrire F sous forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Montrer que $E \subset F$.

Exercice 19. 1. Écrire en compréhension l'ensemble A des multiples de 5 puis l'ensemble B des multiples de 10.

- Trouver et démontrer une relation d'inclusion entre ces deux ensembles.
- Montrer que l'inclusion réciproque n'a pas lieu.

Exercice 20. On définit les ensembles

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x - y = 3\}$$

$$B = \{(t + 1, 2t - 1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 21. Montrer que :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \text{ est pair}\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice 22. Représenter graphiquement les ensembles suivants sur la droite réelle puis les exprimer comme union d'intervalles disjoints.

- $[0, 5[\cap[1, 7]$, $[0, 5[\setminus[1, 7]$,
- $[0, 5[\Delta[1, 7]$, $[0, 10] \cup [-5, 2[$,
- $\{1, \dots, 6\} \setminus [\sqrt{2}, 2\pi]$, $[\sqrt{2}, 2\pi] \setminus 2\mathbb{N}$,
- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \geq 3\}$,
- $\{x \in \mathbb{R} \mid |4x - 2| \leq 8\}$,
- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \geq 3 \text{ et } |2x + 4| \leq 6\}$,
- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \geq 3 \text{ ou } |2x + 4| \leq 6\}$,
- $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x + 1 > 0\}$.

Exercice 23. 1. Expliquer en français courant ce qu'est le produit cartésien de deux ensembles non vides E et F . Comment le note-t-on ? Comment note-t-on le produit cartésien de E par E ?

2. Parmi les ensembles suivants lequel correspond à $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$? (plusieurs réponses possibles)

- $\{(n, p) \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{Z}\}$
- $\{np \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{Z}\}$
- $\{k \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{Z} \quad k = np\}$
- L'ensemble des couples dont la première coordonnée est un entier naturel et la seconde un entier relatif.
- L'ensemble des nombres qui s'écrivent comme le produit d'un entier naturel et d'un entier relatif

3. Parmi les ensembles suivants lequel correspond à l'ensemble des entiers naturels pairs ? (plusieurs réponses possibles)

- $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{(2, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{k \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad k = 2p\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k\}$
- L'ensemble des nombres pairs.

4. Parmi les ensembles suivants lequel correspond à $\mathbb{N}^2$? (plusieurs réponses possibles)

- $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{(n, p) \mid \exists n, p \in \mathbb{N}\}$
- $\{(n, p) \mid n, p \in \mathbb{N}\}$
- L'ensemble des carrés d'entiers naturels.
- L'ensemble des couples d'entiers naturels.

Exercice 24. Soit A l'ensemble des nombres entiers naturels pairs et B l'ensemble des entiers naturels divisibles par 3. A-t-on $\{1\} \cup A \cup B = \mathbb{N}$? Justifier.

Exercice 25. Trouver toutes les partitions de $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 26. Démonstrations de cours

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E .

- Montrer que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- Montrer que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- Montrer que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- Montrer que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Exercice 27.

- Montrer que $\bigcup_{\varepsilon > 0} [\varepsilon, 1] =]0, 1]$.

Remarque : on utilise la convention $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \text{ et } x \leq b\}$. En particulier si $a > b$, $[a, b] = \emptyset$.

- Exprimer $A = \bigcap_{0 < \varepsilon < 1} [\varepsilon, 1]$ à l'aide d'un seul ensemble, puis démontrer l'égalité.
- Déterminer $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$.