TD 1 – Langage et logique

Objectifs : À la fin de ce TD, les étudiants seront en mesure de :

- distinguer un certain nombre d'objets mathématiques (nombres, ensembles classiques de nombres, opérations, relation d'ordre, suites, fonctions, matrices...) mais aussi des définitions, des propositions universelles, des propriétés portant sur des variables ;
- vérifier dans un texte si les domaines des variables sont explicités.
- définir, en revenant aux éléments premiers du langage, certains objets (nombre pairs, impairs, diviseur, nombre premier, nombre premiers entre eux, plus grand diviseur commun, minorant (majorant) d'une partie de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{R}$, d'une suite réelle, d'une fonction réelle, suite ou fonction réelle croissante, décroissante, strictement ou pas ...) ;
- nier des propositions.
- justifier les étapes d'une démonstrations simple en nommant les règles utilisées ;
- spécifier la portée de chaque variable dans un énoncé simple ;
- indiquer si une variable est libre (parlante) ou liée (muette) ;
- reconnaître une erreur d'instanciation ;
- démontrer une proposition simple de manière directe (énoncer les définitions supposées sur les objets, la définition de la propriété à démontrer, justifier les étapes intermédiaires et conclure) ;
- mettre en oeuvre une démonstration d'unicité simple.

Pour tous les exercices, on rappelle qu'un entier $n \in \mathbb{Z}$ divise un entier $m \in \mathbb{Z}$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = nk$.

1 Langage

Exercice 1. Parmi les énoncés suivants lesquels désignent un nombre (N), lesquels désignent un ensemble (E) ? Que dire de l'intru ?

(a) 0.
(b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.
(c) $\{5, 6, 7\}$
(d) $5 + 6 + 7$.
(e) $[\sqrt{2}; \pi[$
(f) L'ensemble des diviseurs de 12.
(g) Il existe un entier p tel que $p \in]1, 2[$.
(h) $\int_0^2 x dx$.

Exercice 2. Parmi les énoncés ci-dessous, lesquels figurent un nombre ? un ensemble ? une proposition ?

1. $\displaystyle\int_0^1 x dx$.
2. Le carré d'un nombre réel est supérieur à -1.
3. L'équation $x^2 = -1$ admet une solution réelle.
4. $[1, 3] \cup]7, 8[$
5. 10 est un majorant de $[1, 3] \cup]7, 8[$.
6. Le réel x vérifie $x^2 - 2x + 2 \leq 0$.

Exercice 3.

1. Quelle est la différence entre les notations f et $f(x)$?
2. Quelle est la différence entre les notations u_n et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 4. Parmi les énoncés ci-dessous, lesquels sont des définitions ? des propositions ? Pour les propositions, indiquer s'il y a lieu les hypothèses et la conclusion. Pensez-vous que les propositions sont vraies ?

1. Un triangle rectangle est un triangle dont l'un des angles mesure 90°.
2. Un triangle est isocèle s'il a deux côté de longueur égale.
3. Si deux angles d'un triangle sont égaux, alors il est isocèle.
4. Un triangle ABC vérifie $AB^2 + AC^2 = BC^2$ s'il est rectangle en A.

Exercice 5. Même consigne que l'exercice précédent.

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ deux nombres pairs. L'entier $n + m$ est pair.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est croissante si pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$, on a : $f(a) \leqslant f(b)$.
3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
4. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. f est croissante sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 0$.

Exercice 6. Parmi les énoncés ci-dessous, lesquels sont des définitions ? des propositions ? Pour les propositions, indiquer s'il y a lieu les hypothèses et la conclusion.

1. Un entier n est un multiple de l'entier p s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = pk$.
2. Si deux nombres entiers sont divisibles par un même nombre, alors ce nombre divise tout multiple de l'un ou de l'autre, leurs sommes et leurs différences.
3. Un nombre p est un nombre premier s'il est divisible exactement par deux entiers : 1 et lui-même.
4. L'ensemble des multiples communs de deux nombres est un ensemble infini.
5. Soit $a \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant a\}$ est non vide.
6. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{N}$. p est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \leqslant p$.
7. L'ensemble des diviseurs communs de deux entiers naturel est non vide et majoré.
8. Deux entiers sont premiers entre-eux si leur seul diviseur commun est 1.
9. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Exercice 7.
1. Nommer les propriétés suivantes :
   (a) $\forall n, m, k \in \mathbb{N} \quad n+(m+k) = (n+m)+k$
   (b) $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n + m = m + n$
2. Énoncer les propriétés de commutativité et d'associativité de la multiplication.
3. Nommer la propriété :
   $\forall n, m, k \in \mathbb{N} \quad k(n + m) = kn + km$
4. (a) Nommer la propriété :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ n + 0 = 0 + n = n$
   (b) Énoncer son analogue pour la multiplication.
5. Voici la propriété de simplification pour l'addition :
   $\forall n, m, k \in \mathbb{N}$ si $n + k = m + k$, alors $n = m$.
   Quel est son analogue pour la multiplication ?
6. Nommer les propriétés suivantes :
   (a) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ si $n + m = 0$, alors $n = 0$ et $m = 0$
   (b) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ si $n \cdot m = 0$, alors ($n = 0$ ou $m = 0$).
7. (a) Expliquer pourquoi la propriété suivante s'appelle la monotonie de l'addition :
   $\forall n, m, k \in \mathbb{N}\ n + k \leq m + k$ si et seulement si $n \leq m$.
   (b) Énoncer la propriété de monotonie pour la multiplication dans $\mathbb{N}$.
8. Nommer les propriétés suivantes (dans le désordre, transitivité, antisymétrie et réflexivité de la relation d'ordre)
   (a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq n$
   (b) $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad$ si ($n \leq m$ et $m \leq n$), alors $n = m$
   (c) $\forall n, m, k \in \mathbb{N} \quad$ si ($n \leq m$ et $m \leq k$), alors $n \leq k$

Exercice 8. Parmi les propositions de l'exercice précédent, lesquelles se généralisent à $\mathbb{Z}$?

2 Logique

Exercice 9. Les propositions ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? (x désigne un réel)
1. $3 < \pi$
2. $3 \leqslant \pi$
3. $3 \leq 3$
4. $x^2 \geqslant 0$
5. $|x| \geqslant -1$
6. $(x > 1) \Rightarrow (x^2 < -1$ ou $x^2 > 1)$

Exercice 10. Les propositions ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? (Rappel : $a|b$ signifie « a divise b »)
1. $2|3$
2. $2|3$ ou $2|4$
3. $2|3$ et $2|4$
4. $3|6$ ou $2|4$
5. $3|6$ et $2|4$

Exercice 11. Compléter les pointillés par le connecteur logique le plus approprié (choisi parmi $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow$).
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4\ \ldots\ x = 2$.
2. $\forall z \in \mathbb{C},\ z = \overline{z}\ \ldots\ z \in \mathbb{R}$.
3. $\forall n, p \in \mathbb{N},\quad n+p$ pair $\ \ldots\ $ n et p sont pairs.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \pi\ \ldots\ e^{2ix} = 1$.

Exercice 12. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

$$(1 = 2) \Longrightarrow (2 = 5)$$

Exercice 13. Compléter avec *il faut*, *il suffit* ou *il faut et il suffit*, puis écrire la proposition en langage formel en utilisant une implication.
1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour qu'il existe m appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $m^2 = n$, $\cdots$ que n soit positif ou nul.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour qu'il existe t appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $t^2 = x$, $\cdots$ que x soit positif ou nul.
3. Pour qu'un quadrilatère soit un carré, $\cdots$ que ses diagonales soient perpendiculaires.

Exercice 14. Soient A, B, C et D quatre points du plan. Donner une condition nécessaire à « ABCD est un rectangle ». Donner en ensuite une condition suffisante.

Exercice 15. Nier les propositions suivantes :

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
2. Il existe un groupe de TD dans lequel tou-te-s les étudiant-e-s sont majeurs.
3. Dans tous les groupes de TD, tous les étudians sont majeurs.
4. $x = 1$.
5. $x > 0$.
6. $x = 1$ ou $x > 0$
7. $0 \leqslant x < 1$.
8. $x = 0$ ou ($x^2 = 1$ et $x \geqslant 0$).
9. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{N}$, $\exists y \in A$ tel que $x + y > 10$

3 Quantificateurs

Quantificateurs

Exercice 16. On considère les quatre propositions suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x$

1. Chacune de ces assertions est-elle vraie ou fausse ?
2. Donner leur négation.

Exercice 17. On considère les quatre propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 1 \Longrightarrow x \geqslant 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < 0 \Longrightarrow x \leqslant 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < y^2 \Longrightarrow x < y$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = y^2 \Longrightarrow |x| \leqslant |y|$

1. Chacune de ces assertions est-elle vraie ou fausse ?
2. Énoncer leur négation.
3. Énoncer leur contraposée.
4. Énoncer leur réciproque. Est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 18. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Pour tous entiers a, b strictement plus grands que 1, il existe un entier strictement plus grand que 1 qui divise a et b
2. Il existe un entier strictement plus grand que 1 qui divise tous entiers a et b strictement plus grand que 1.
3. Pour tout entier a strictement plus grand que 1, il existe un entier strictement plus grand que 1 qui divise a et, pour tout entier b strictement plus grand que 1, il existe un entier strictement plus grand que 1 qui divise b.

Exercice 19. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses (pas de démonstration requise) et les nier.

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad$ si $x \geqslant 3$, alors $x^2 \geqslant 5$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad$ si $x > 1$, alors $x \geqslant 2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 1$ est équivalent à $x \geqslant 1$.

Mêmes questions en remplaçant « $\forall x \in \mathbb{R}$ » par « $\forall x \in \mathbb{N}$ ».

Exercice 20. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout entier naturel n, il existe un réel x tel que $x > 2n$.
2. Il existe un réel x tel que, pour tout entier naturel n, $x > 2n$.
3. Pour tout réel x, pour tout réel y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.
4. Pour tout réel positif x, pour tout réel positif y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.

Exercice 21. On considère les propositions suivantes :

a) Le carré de tout nombre réel est positif.
b) Un nombre entier divisible par 10 est divisible par 5 (à l'aide de la relation divise, notée $|$.)
c) Tout entier peut s'écrire comme la somme de deux carrés.
d) Le produit de deux nombres réels est positif si et seulement s'ils sont tous les deux positifs.
e) La somme de deux nombres impairs est impair.
f) Tout élément de $\mathbb{Z}$ admet un opposé (pour l'addition).
g) Il existe un plus petit entier relatif.

Questions :

1. Ces propositions sont-elles vraies ? (donner un contre-exemple dans le cas où elle sont fausses, aucune démonstration formelle n'étant attendue dans le cas où elle sont vraies)
2. Les écrire en utilisant des quantificateurs
3. Écrire leurs négations.

Exercice 22. Comparer les différentes phrases (sont-elles équivalentes ? la négation l'une de l'autre ? Quelles sont celles qui impliquent les autres ?)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant y$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ x \leqslant y$.

3. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant y$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R},\ y < x$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $y < x$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y$.

Remarque : les définitions rencontrées dans les exercices 23, 24 et 25 sont à connaître et font partie intégrante du cours.

Exercice 23. Traduire en langage formel les phrases suivantes. Écrire ensuite leur négation.

1. La partie $A \subset \mathbb{N}$ est majorée par 42.
2. La partie $A \subset \mathbb{N}$ est majorée.
3. La partie $A \subset \mathbb{Z}$ est minorée.
4. La partie $A \subset \mathbb{Z}$ est bornée.

Exercice 24. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en langage formel les phrases suivantes.

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est constante ;
4. f est périodique ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f n'est pas la fonction nulle ;
7. f est croissante sur $\mathbb{R}$;
8. f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.
9. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
10. f est inférieure à g ;
11. f n'est pas inférieure à g.
12. f est positive sur l'intervalle $[-1\,;1]$;
13. f est paire ;
14. f est impaire ;

Exercice 25. Reprendre l'ensemble des questions de 1 à 11 de l'exercice 24 en remplaçant les fonctions f et g par des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercices à chercher

Exercice 26. On considère les énoncés suivants :

(a) La multiplication est prioritaire sur l'addition.
Ainsi, pour tous nombres a, b, c, $a + b \times c = a + (b \times c)$.

(b) Un entier n est divisible par un entier p s'il peut s'écrire comme un multiple de p, c'est-à-dire s'il existe un entier k tel que $n = p \times k$.

(c) La soustraction dans $\mathbb{Z}$ est associative.

(d) Une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante si et seulement si sa dérivée est strictement positive.

(e) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout entier n on a $u_n \leq u_{n+1}$.

(f) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante si : pour tous réels x, y, si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$.

(g) Si une variable s'appelle n, c'est toujours un entier. Si elle s'appelle x, c'est forcément un réel.

Questions :

1. Parmi les énoncés précédents il y a des définitions, une convention et des propositions Repérez les.
2. Les propositions sont-elles vraies ?

Exercice 27. On considère les énoncés suivants

a) L'entier naturel n est un multiple de l'entier p.

b) L'ensemble des diviseurs de l'entier naturel p.

c) L'ensemble des multiples de l'entier naturel p.

d) Si deux nombres entiers sont divisibles par un même nombre, alors ce nombre divise tout multiple de l'un ou de l'autre, leurs sommes et leurs différences.

e) Un nombre p est un nombre premier s'il est divisible exactement par deux entiers : 1 et lui-même.

f) Si un nombre premier divise un produit alors il divise l'un des facteurs (lemme d'Euclide). (On pourra utiliser la notion "divise" et la notion de "être nombre premier").

g) L'ensemble des diviseurs communs de deux nombres.

h) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5\}$ est non vide.

i) 10 est un majorant de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5\}$

j) p est un majorant de la partie A de $\mathbb{N}$.

k) L'ensemble des diviseurs communs de deux entiers naturel est non vide et majoré.

l) Le plus grand diviseur commun de deux nombres entiers.

m) Deux entiers sont premiers entre-eux si leur seul diviseur commun est 1.

n) Si un nombre divise un produit et est premier avec l'un des facteurs de ce produit, alors il divise l'autre facteur (Lemme de Gauss).

o) $\mathbb{C}$ est stable par addition et par multiplication.

p) L'addition dans $\mathbb{C}$ est commutative et associative.

q) 1 est l'unique élément neutre de $\mathbb{C}^*$ pour la multiplication.

Questions :

1. Lesquels sont des définitions ? Quel objet/notion est définie ?
2. Lesquels sont des nombres ?
3. Lesquels sont des ensembles ?
4. Lesquels sont des propositions ?
5. Lesquels dépendent de la valeur des variables ?
6. Ecrire (a), (b), (c), (e), (g), (j) et (m) à l'aide des éléments premiers du langage (on pourra éventuellement définir des objets intermédiaires)
7. Démontrer (d), (h), (k) et (q).

Exercice 28. Démontrer les propositions suivantes.

(a) Le produit de deux nombres impairs est impair.

(b) La composée d'une application croissante avec une application décroissante est une application décroissante.

(c) Le produit de deux suites positives croissantes est une suite positive croissante.

(d) Pour tout nombre complexe z, si $z = a + ib$, avec a et b réels, alors a et b sont uniques.
(Ce résultat permet de montrer que les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe sont bien définies).

Exercice 29. Montrer que la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et croissante sur $]0\,;+\infty[$.