Chapitre 1

Calculs de limites

Le chapitre suivant concerne les limites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$. En se rappelant qu'une suite est une application définie sur $\mathbb{N}$, il est clair que les résultats sur les limites de fonctions peuvent également s'appliquer au calcul de la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

I. Limites de sommes, de produits et de quotients de fonctions

Lorsque l'on connaît les limites de deux fonctions f et g, on peut parfois en déduire la limite de $f+g$, de $f\times g$ et de $\dfrac{f}{g}$. On utilise les tableaux suivant :

Proposition 1.1

Soient f et g deux fonctions et l et l' deux nombres réels.

Limite de f	Limite de g	Limite de $f+g$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	FI*
$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite de f	Limite de g	Limite de $f \times g$
l	l'	$l \times l'$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$l \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	FI

Limite de f	Limite de g	Limite de $\frac{f}{g}$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$\pm\infty$	0
0	$l \neq 0$	0
$\pm\infty$	$l \neq 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI
0	0	FI

*FI signifie « Forme Indéterminée » : les règles de sommes, de produits et de quotients ne permettent pas de conclure. Il faut donc utiliser d'autres propriétés pour déterminer la limite.

Exemple 1.
On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$.
On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3x\right) = +\infty$.

II. Les sept méthodes à connaître pour lever une indéterminée

1. Factoriser par le terme dominant

Proposition 1.2

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fraction rationnelle $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ (où P et Q sont des polynômes) en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite du quotient des termes de plus haut degré de P et Q

Remarque. *Attention, cette règle ne s'applique que lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Lorsqu'on s'intéresse par exemple à une limite en 0, le terme dominant est en fait le terme de plus petite puissance. Pour cette raison, et pour éviter les erreurs, on fera apparaître le détail de la factorisation comme dans les exemples suivants.*

Exemple 2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^6+7x^4-17x+4}{x^6+1}$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{-3x^6+7x^4-17x+4}{x^6+1} = \frac{x^6\left(-3+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^5}+\frac{4}{x^6}\right)}{x^6\left(1+\frac{1}{x^6}\right)} = \frac{-3+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^5}+\frac{4}{x^6}}{1+\frac{1}{x^6}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -3$$

Exemple 3. *Calculer* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+3x}{x^6+2x}$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\frac{x^2+3x}{x^6+2x} = \frac{x(3+x)}{x(2+x^5)} = \frac{3+x}{2+x^5} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$$

2. Utiliser un changement de variables

Exemple 4. *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2-5}$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = x^2-5$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, y tend vers $+\infty$.
Ainsi, $e^{x^2-5} = e^y \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque. *Effectuer un changement de variables est revient en fait à utiliser les résultats sur la limite des fonctions composées (Dans l'exemple, on a composé la fonction $x \longrightarrow x^2-5$ avec la fonction exponentielle).*

3. Utiliser un encadrement

Théorème 1.3 – gendarmes

Soient f, g, h trois fonctions et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Supposons que pour x proche de x_0, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$.
Alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$.

Exemple 5. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$.

Solution : Pour tout $x > 0$ *:*
$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
Donc $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\cos(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
Comme $\dfrac{1}{x}$ *et* $-\dfrac{1}{x}$ *tendent vers* 0 *lorsque* x *tend vers* $+\infty$, *on en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$

4. Multiplier par la quantité conjuguée lorsqu'il y a des racines

Exemple 6. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+2}$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{x^2+8} + \sqrt{x^2+2}\right)}{\sqrt{x^2+8} + \sqrt{x^2+2}} = \frac{6}{\sqrt{x^2+8} + \sqrt{x^2+2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. Utiliser un nombre dérivé

Remarque. *Si* f *est dérivable en* a, *par définition du nombre dérivé* $f'(a)$,
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$, *ou de manière équivalente :* $\lim\limits_{b\to a} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$.

Exemple 7. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

Solution : On note f *la fonction exponentielle. Pour tout* $x \neq 0$,
$\dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0) = e^0 = 1$.
(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$*).*

6. Utiliser les résultats de croissance comparée

Proposition 1.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{kx}}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^{kx} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)^k}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n (\ln(x))^k = 0$

Exemple 8. *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 1}{e^{2x} x^2 + 12x}$

Solution : Pour tout $x > 0$,

On pose $y = 2x$. *Lorsque* x *tend vers* $+\infty$, y *tend vers* $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^4 - 1}{e^{2x} x^2 + 12x} &= \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^4 - 1}{e^y \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 12\frac{y}{2}} \\
&= \frac{y^4}{e^y y^2} \times \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{y^4}}{\frac{1}{4} + \frac{6}{y}} \\
&= \frac{y^2}{e^y} \times \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{y^4}}{\frac{1}{4} + \frac{6}{y}}
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\frac{1}{16} - \frac{1}{y^4}}{\frac{1}{4} + \frac{6}{y}} \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$

et, par croissance comparée, $\dfrac{y^2}{e^y} \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 1}{e^{2x} x^2 + 12x} = 0$.

7. Règle de l'Hôpital

Proposition 1.5

Soit $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $a \in \mathrm{I}$. Soient deux fonctions f et g définies sur I et telles que $\lim_a f = \lim_a g = 0$ et $g'(a) \neq 0$. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Remarque. *On peut remplacer l'hypothèse* $\lim_a f = \lim_a g = 0$ *par* $\lim_a f = \lim_a g = +\infty$ *et le résultat reste vrai.*

Remarque. *La règle reste également vraie pour des limites en* $+\infty$ *ou en* $-\infty$ *à condition, là aussi que la limite de* $g'(x)$ *ne soit pas* 0.

Exemple 9. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$.

Solution : Pour tout $x > 0$, *on pose* $f(x) = \sqrt{x}$ *et* $g(x) = \ln(x)$.
On est bien dans le cadre des hypothèses de la règle de l'Hopital.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2} = +\infty.$

Remarque. *Les hypothèses de la règle de l'Hopital sont précises. En particulier, il faut bien vérifier que* g' *ne s'annule pas au voisinage de la limite calculée.*
Cette règle étant souvent source d'erreur, on veillera à ne l'utiliser qu'en dernier recours. Par exemple, pour déterminer la limite d'une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes), on n'utilisera pas la règle de l'Hopital mais on factorisera les polynômes afin de simplifier la fraction et lever ainsi l'indéterminée.

Exercices

Exercice 1. ***Méthodes algébriques***

1. *Calculer les limites suivantes.* $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x^2+x-6}{x+2}$ *et* $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^4-x-1}{(x-1)^3}$.
2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x}$, *puis* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$,*]*

Exercice 2. ***Encadrement***
Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}(\cos(1+1/x)-1), \qquad \lim_{x\to+\infty} \sin(e^x)\sin(e^{-x}).$$

Exercice 3. ***Croissances comparées***

1. *Grâce aux changements de variables indiqué, déduire successivement les limites suivantes en utilisant le fait que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)/x^2 = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad (x = y^2), \qquad \lim_{x\to0} x\ln(x) = 0 \quad (x = 1/y).$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (y = e^x), \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad (y = -x).$$

2. *Montrer plus généralement que pour tous* $a, b > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^a}{x^b} = 0, \qquad \lim_{x\to0} x^a|\ln(x)|^b = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$$

3. ***Application*** *: Calculer les limites suivantes.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^e}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \ln(|x|)e^x, \qquad \lim_{x\to0} x^x.$$

Exercice 4. ***Facteur dominant***
Déterminer le facteur dominant des numérateurs et dénominateurs des fractions rationnelles suivantes, puis calculer les limites.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1+e^{3x}}{x+2x^2+e^x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1+(\ln x)^4}{1+x+x^2+x^3+(\ln x)^5}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)^2(x-3)(x^2+2)}{(3x+1)^3\sqrt{x^2+1}(2x-1)}.$$

Exercice 5. ***Calcul des dérivées***
En utilisant le calcul des dérivées que l'on admettra, calculer si possible les limites suivantes :

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1}, \qquad \lim_{x\to\pi/4} \frac{\tan(x)-1}{x-\pi/4}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}.$$

Exercice 6. ***Règle de l'Hôpital***
En utilisant le calcul des dérivées, calculer les limites suivantes quand c'est possible :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\ln(1+2x)}, \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{\sin x},$$

Exercice 7. ***Valeurs absolues***
Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to-2} \frac{|x^2+x-3|-|3x^2+4x+1|}{|2x+1|-|x+5|}, \qquad \lim_{x\to+\infty} |x^3+e^x-e^{-x}|-|x^3-e^x-3x|.$$

Exercice 8. ***Puissances généralisées***
Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} (2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice 9. ***Un calcul trigonométrique***

1. *Exprimer* $\cos(2t)$ *en fonction de* $\sin(t)$.
2. *Utiliser le calcul ci dessus pour calculer*

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x} \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

Exercice 10. ***Limites non existantes***
Justifier que les limites suivantes n'existent pas.

$$\lim_{x\to-2} \frac{x+3}{x+2} \qquad \lim_{x\to0} \frac{|x|}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos(x).$$

Entraînement

Exercice 11. *Calculer les limites suivantes,* ***en expliquant précisément la méthode employée****.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+(\ln x)^3}{x^4e^{-x}+x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1)-\ln(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2+(\ln x)^3}{x^4e^{-x}+x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2x+3x^2+4x^3+(\ln(x+1))^4}{(x^3-\sqrt{x}\ln x)}$

5. $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+\ln(x)}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1+(\ln x)^4}{1+x^2+x^3+(\ln x)^5}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\left(\cos\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1\right)$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\sin(1/x)$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\ln(1+2x)}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{x^3-1}{x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1+e^{3x}}{x+2x^2+e^x}$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

Chapitre 2

Fonctions réciproques et dérivation

I. Rappels sur la dérivation

1. Définition et généralités

Définition 2.1

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$. On dit que f est dérivable en a si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe,}$$

et on note $f'(a)$ cette limite, appelée nombre dérivé de f en a.

Proposition 2.1

Soit f une fonction dérivable en a. L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Proposition 2.2

Si g est dérivable en a et si f est dérivable en $g(a)$, alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \times g'(a).$$

Exemple 1. *Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction* $h : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$. *Calculer ensuite sa dérivée.*

Solution : On a $h(x)$ *est définie si* $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ \textit{et} \\ \dfrac{x+1}{x-2} \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in]-\infty;-1] \cup]2;+\infty[.$

De plus, h est dérivable en x si x vérifie $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ \textit{et} \\ \dfrac{x+1}{x-2} \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[.$

Cela signifie donc que l'ensemble de définition de h est $]-\infty;-1] \cup]2;+\infty[$ *et son ensemble de dérivabilité est* $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$.

Enfin pour calculer $h'(x)$*, on pose* $f(x) = \sqrt{x}$ *(pour* $x > 0$*) et* $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ *(pour* $x \in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$*). On a donc* $h(x) = f \circ g(x)$.

Par conséquent,

$$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}} \times \frac{-3}{(x-2)^2} = \frac{-3}{2(x-2)\sqrt{(x+1)(x-2)}}.$$

Définition 2.2

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou de manière équivalente si $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

Proposition 2.3 – (admise)

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

2. Application aux calculs de limites

Proposition 2.4

Si $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en x_0, alors il existe une fonction $h : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h(x)(x - x_0)$$

et telle que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$.

Démonstration. Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en x_0.

On pose, pour tout $x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\}$, $h(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$ et $h(x_0) = 0$. Alors, on montre facilement que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h(x)(x - x_0)$.

De plus, le fait que $h(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ découle directement de la définition du nombre dérivé $f'(x_0)$. □

Remarque. *Dans un calcul de limite, la proposition 2.4 permet de remplacer une fonction par l'expression de sa tangente en négligeant le terme* $h(x)(x - x_0)$*. C'est par exemple ce qui est fait dans le calcul de limite qui suit.*

Exemple 2. *Calculer* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+5x)}{4x}$.

Solution :
En considérant la fonction $f(x) = \ln(1+5x)$ définie sur $\left]-\frac{1}{5};+\infty\right[$ et en appliquant la proposition 2.4 en $x_0 = 0$, on sait qu'il existe une fonction h telle que $\lim_0 h = 0$ et telle que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{5};+\infty\right[, \quad \ln(1+5x) = f(1) + f'(1)x + h(x)x = 5x + h(x)x.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{5};+\infty\right[, \quad \frac{\ln(1+5x)}{4x} = \frac{5}{4} + h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{5}{4}.$$

car $h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. *On pourra retenir qu'au voisinage de* 0, $\ln(1+x) \simeq x$ *(la tangente en* 0 *de cette fonction est la droite d'équation* $y = x$*). Ici, l'utilisation de la proposition* **??** *permet simplement d'écrire rigoureusement que, au voisinage de* 0,

$$\frac{\ln(1+5x)}{4x} \simeq \frac{5x}{4x} \simeq \frac{5}{4}.$$

II. Fonctions réciproques

Définition 2.3

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ une fonction. On dit que f est bijective si pour tout $y \in \mathrm{J}$, il existe un unique $x \in \mathrm{I}$ tel que $y = f(x)$.

Proposition 2.5

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$. f est bijective si, et seulement si, il existe $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ telle que $g \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{I}}$ et $f \circ g = \mathrm{I}d_{\mathrm{J}}$.

Démonstration. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application.

- Supposons que f est bijective. On définit l'application $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ de la façon suivante :
  Pour tout $y \in \mathrm{F}$, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f.
  g est bien défini car cet antécédent appartient à E.
  Montrons maintenant que $g \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$.
  Soit $x \in \mathrm{E}$,
  $g \circ f(x) = g(f(x))$.
  Or, x est un antécédent de $f(x)$ par f (c'est le seul car f est bijective) donc, par définition de g, on a $g \circ f(x)$.
  De même, montrons que $f \circ g = \mathrm{I}d_{\mathrm{F}}$.
  Soit $y \in \mathrm{F}$,
  $f \circ g(y) = f(g(y))$.
  Or, par définition de y, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f. Son image par f est

donc y et on a bien $f \circ g(y) = y$.

- Réciproquement, supposons qu'il existe $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $g \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ et telle que $f \circ g = \mathrm{I}d_{\mathrm{F}}$.
  Comme l'identité est bijective, on sait donc que $g \circ f$ est injective et donc que f est injective (la preuve du fait que f est injective est laissée au lecteur).
  De même, $f \circ g$ est surjective et on en déduit que f est surjective.
  Ainsi, f étant injective et surjective, elle est bijective.

- Montrons enfin que l'application g est unique. Supposons qu'il existe deux applications g_1 et g_2 telles que $g_1 \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ et $f \circ g_1 = \mathrm{I}d_{\mathrm{F}}$ d'une part et $g_2 \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ et telle que $f \circ g_2 = \mathrm{I}d_{\mathrm{F}}$ d'autre part.
  Supposons par l'absurde que $g_1 \neq g_2$.
  Il existe $y \in \mathrm{F}$ tel que $g_1(y) \neq g_2(y)$.
  Par conséquent, $f(g_1(y)) \neq f(g_2(y))$ car f est injective.
  Donc $\mathrm{I}d_{\mathrm{F}}(y) \neq \mathrm{I}d_{\mathrm{F}}(y)$, ce qui implique que $y \neq y$, ce qui est absurde.

□

Remarque. *La fonction g est appelée la réciproque de f et est notée f^{-1}.*

Remarque. *Attention, l'application f^{-1} existe uniquement dans le cas où f est bijective. L'image réciproque d'un ensemble J, notée $f^{-1}(\mathrm{J})$, existe néanmoins sans condition sur f.*

Théorème 2.6 – des valeurs intermédiaires

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathrm{J}$ une fonction **continue**. Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, l'équation $f(x) = y$ admet (au moins) une solution $x \in [a, b]$.

Remarque. *Autrement dit, la fonction f est surjective de $[a; b]$ sur $[f(a); f(b)]$. Cela ne signifie cependant pas qu'elle soit bijective (certains éléments peuvent avoir plusieurs antécédents). Il faut prendre alors une hypothèse plus contraignante sur la fonction f pour forcer la bijectivité.*

Théorème 2.7 – de la bijection

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors, $f : \mathrm{I} \to f(\mathrm{I})$ est une bijection.

Remarque. *En prenant $\mathrm{I} = [a, b]$, on retrouve ce que l'on appelle le « corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires ».*

III. Régularité de la fonction réciproque

Proposition 2.8

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une bijection. Si f est monotone alors f^{-1} est monotone, de même monotonie. Autrement dit :

- si f est croissante alors f^{-1} est croissante.
- si f est décroissante alors f^{-1} est décroissante.

Démonstration. On traite le cas où f est croissante, le cas décroissant étant similaire et laissé au lecteur. On commence par remarquer que si f est bijective et croissante sur I, alors f est strictement croissante sur I (la preuve de ce résultat est laissée au lecteur).
Montrons ensuite que f^{-1} est croissante. Soient $c, d \in \mathrm{J}$ tels que $c \leqslant d$. Alors on va montrer que $f^{-1}(c) \leqslant f^{-1}(d)$. Supposons par l'absurde que $f^{-1}(c) > f^{-1}(d)$. Comme f est strictement croissante, on en déduit que $f\left(f^{-1}(c)\right) > f\left(f^{-1}(d)\right)$ et donc que $c > d$, ce qui est absurde.
Ainsi, on a montré que f^{-1} est croissante. □

Remarque. *La même preuve permet de montrer que f^{-1} est même strictement monotone.*

Exemple 3. *La fonction exponentielle est strictement croissante et donc la fonction logarithme (définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle) est strictement croissante.*

Proposition 2.9 – Représentation graphique

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une fonction bijective. Alors la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Démonstration. On utilise le fait que le symétrique d'un point $\mathrm{M}(x; y)$ par rapport à la première bissectrice est le point $\mathrm{M}'(y; x)$.
Ainsi, pour tout $(x; y) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x; y) \in \mathscr{C}_f &\iff y = f(x) \\ &\iff x = f^{-1}(y) \\ &\iff \mathrm{M}'(y; x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}} \end{aligned}$$

□

Exemple 4. *Les courbes des fonctions carrées et racines carrées définies sur $\mathbb{R}^+$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice. Idem pour les fonctions exponentielle et logarithme.*

Proposition 2.10 – (admise)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une bijection. Si f est continue sur I, alors f^{-1} est continue sur J.

Proposition 2.11

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une bijection. Supposons que f est dérivable sur I de dérivée qui ne s'annule pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall y \in \mathrm{J}, \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Remarque. *La fonction f^{-1} n'est pas dérivable en les points $y = f(x)$ pour lesquels $f'(x) = 0$. Cela se traduit graphiquement par le fait que, la courbe de f ayant une tangente horizontale en x, la courbe de $f^{(-1)}$ a une tangente verticale en y.*

Démonstration. Soit $y, y_0 \in \mathrm{J}$. Soient $x, x_0 \in \mathrm{I}$ tels que $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. On s'intéresse au taux de variation $\dfrac{f^{(-1)}(y) - f^{(-1)}(y_0)}{y - y_0}$ lorsque y tend vers y_0 (c'est-à-dire lorsque x tend vers x_0).

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(-1)}(y) - f^{(-1)}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\
&\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{(car } f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0) \neq 0\text{)} \\
&= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Exemple 5. *Dérivée de la fonction* ln.

Si $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction exponentielle, alors $f^{-1} : y \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto \ln(y) \in \mathbb{R}$ est sa réciproque.
Pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}.$$

Exemple 6. *Dérivée de la fonction racine carrée.*

Si $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction carrée, alors $f^{-1} : x \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ est sa réciproque (la fonction racine carrée).
Pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

IV. Fonctions trigonométriques réciproques

Pour chaque fonction trigonométrique (cos, sin, tan), on va déterminer un ensemble sur lequel elles sont bijectives puis on va étudier leur fonction réciproque (nommées arccos, arcsin, arctan) en étudiant les propriétés suivantes de ces fonctions :

- Ensemble de définition
- Parité
- Variations
- Dérivabilité
- Dérivée
- Limites

1. Fonction arcsin

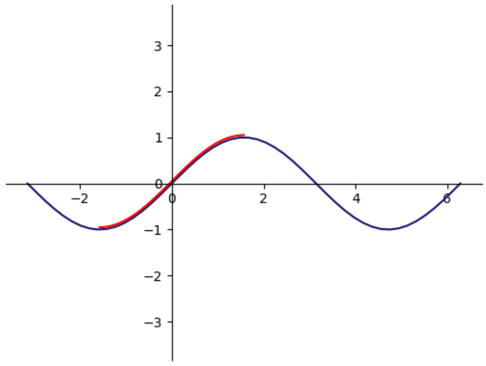
La fonction sin est périodique, donc la fonction n'est clairement pas injective sur $\mathbb{R}$. Il faut donc restreindre le domaine pour qu'elle soit bijective.

Soit $f : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto \sin(x) \in [-1, 1]$.
On a alors :

- f est continue
- f est strictement croissante
- $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Donc d'après le théorème de la bijection (théorème 2.7), f est bijective.

Remarque. *La figure ci-dessous représente la fonction sinus (en bleu) et sa restriction à l'intervalle* $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *(en rouge).*



Définition 2.4

On définit $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction réciproque de la fonction f.
Cela signifie que :

- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$.
- $\forall y \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin y) = y$

Remarque. *Attention ! La première égalité n'est pas vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par exemple,*

$$\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \arcsin(-1) = \frac{-\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2}.$$

Proposition 2.12

- La fonction arcsin est impaire.
- la fonction arcsin est continue et croissante sur $[-1,1]$,
- la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée

$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\cos\circ\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin\arcsin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Démonstration. La preuve du premier point est laissée au lecteur. Les deux autres points résultent des résultats généraux de la partie précédente. □

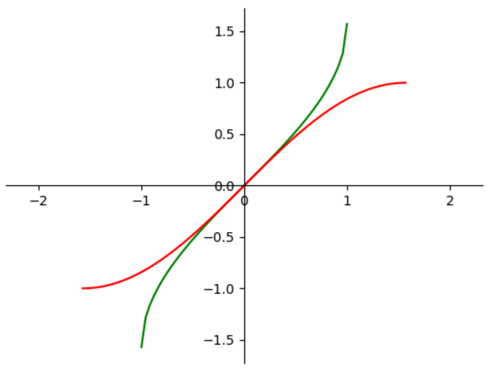
De plus, à partir des valeurs remarquables de la fonction sin, on a un certain nombre de valeurs remarquables de arcsin. Par exemple, $\arcsin(\sqrt{2}/2) = 1/2$.

Proposition 2.13

- $\displaystyle\lim_{x\to -1} \arcsin(x) = -\frac{\pi}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

Démonstration. Cela résulte directement de la continuité de la fonction arcsin. □

Remarque. *La figure ci-dessous représente la fonction sinus sur* $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *(en rouge) et la fonction arcsin sur* $[-1;1]$ *(en vert). Les deux courbes sont les symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice. De plus, on voit que la courbe de la fonction arcsin admet deux tangentes verticales (en* -1 *et* 1*) car* $\sin'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.



2. Fonction arccos

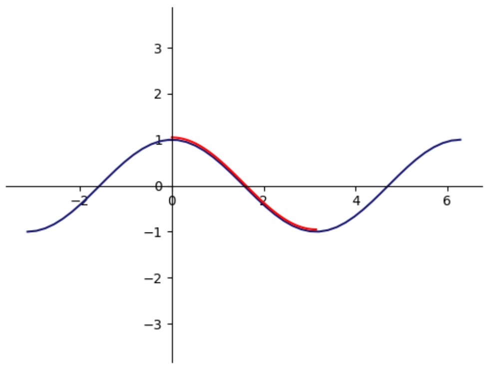
Comme pour la fonction sinus, il faut restreindre le domaine de la fonction cosinus pour qu'elle soit bijective.

Soit $f : x \in [0;\pi] \longmapsto \cos(x) \in [-1,1]$.
On a alors :

- f est continue
- f est strictement décroissante
- $f(0) = 1$
- $f(\pi) = -1$

Donc d'après le théorème de la bijection (théorème 2.7), f est bijective.

Remarque. *La figure ci-dessous représente la fonction cosinus (en bleu) et sa restriction à l'intervalle* $[0;\pi]$ *(en rouge).*



Définition 2.5

On définit $\arccos : [-1,1] \to [0;\pi]$ la fonction réciproque de la fonction f.
Cela signifie que :

- $\forall x \in [0;\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$.
- $\forall y \in [-1,1]$, $\cos(\arccos y) = y$

Remarque. *Attention ! Comme pour arcsin, la première égalité n'est pas vérifiée pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.14

- la fonction arccos est continue et décroissante sur $[-1,1]$,
- la fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée

$$(\arccos)'(y) = \frac{1}{-\sin\circ\arccos y} = -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos\arccos y)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

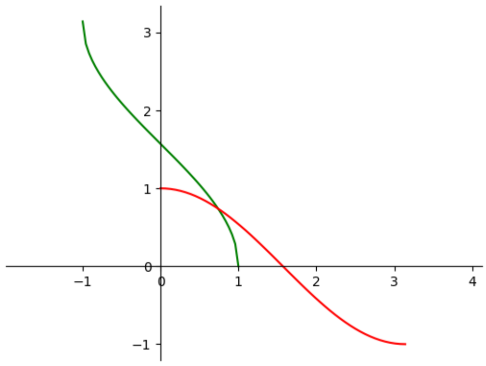
Remarque. *La fonction* arccos *est ni paire, ni impaire étant donné que* $f(1) = 0$ *et* $f(-1) = \pi$.

Proposition 2.15

- $\lim_{x \to -1} \arccos(x) = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \to 1} \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

Démonstration. Cela résulte directement de la continuité de la fonction arccos. □

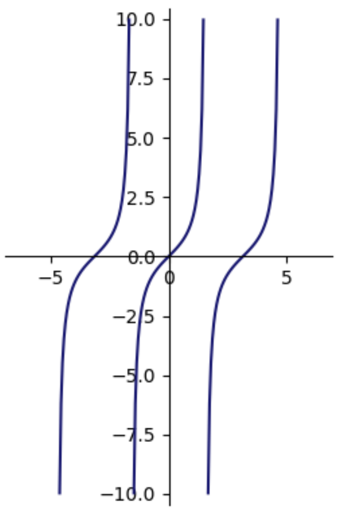
Remarque. *La figure ci-dessous représente la fonction cosinus sur* $[0;\pi]$ *(en rouge) et la fonction arccos sur* $[-1;1]$ *(en vert). Là aussi, les deux courbes sont les symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice et on voit que les tangentes verticales en* 1 *et en* -1 *traduisent la non-dérivabilité de arccos en ces points.*



3. Fonction arctan

A priori, la fonction tangente est définie sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$. Elle n'est cependant pas injective. On va donc la restreindre à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque. *La figure suivante représente la courbe de la fonction tangente.*



Soit $f : x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \tan(x) \in \mathbb{R}$.
On a alors :

- f est continue
- f est strictement croissante
- $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$

Donc d'après le théorème de la bijection (théorème 2.7), f est bijective.

Définition 2.6

On définit $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction réciproque de la fonction f.
Cela signifie que :

- $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$.
- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan y) = y$

Proposition 2.16

- La fonction arctan est impaire.
- la fonction arctan est continue et croissante sur $[-1, 1]$,
- la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$(\arctan)'(y) = 1 + \tan^2\left(\arctan(y)\right) = \frac{1}{1+y^2}.$$

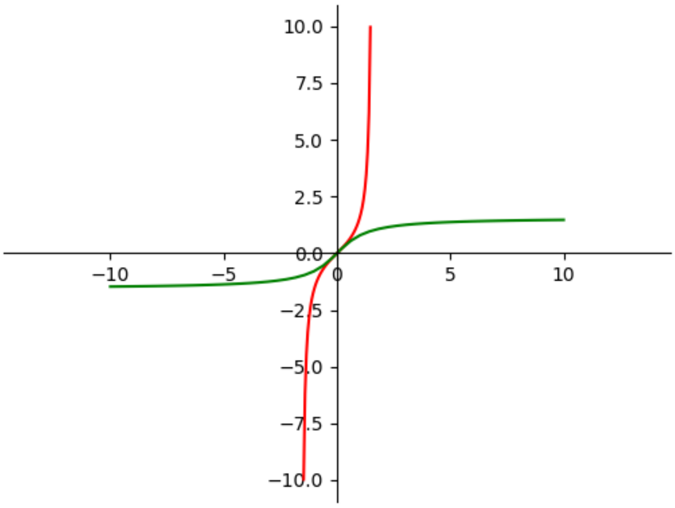
Démonstration. La preuve du premier point est laissée au lecteur. Les deux autres points résultent des résultats généraux de la partie précédente. □

On retiendra la valeur remarquable suivante : $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ car $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Proposition 2.17

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

Remarque. *La figure ci-dessous représente la fonction tan sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *(en rouge) et la fonction arctan sur* $\mathbb{R}$ *(en vert).*



Exercices

Exercice 1. *1. En calculant les constantes a_0 et a_1 pour des fonctions dérivables dans l'expression $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)h(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$ déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\tan(2x^2-8)}{x^2-4}$$

2. Déterminer l'équation de la droite tangente des fonctions f et g données par $f(x) = \ln(1+3x)$ et $g(x) = \sin(3x)$ en $x = 0$.

Exercice 2. *1. Déterminer l'équation de la droite tangente aux courbes des fonctions f et g données par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = ax^2 + b$ en $x = 1$*

2. Déterminer les réels a et b de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ de la manière suivante soit dérivable sur $]0, +\infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si\ 0 \le x \le 1 \\ ax^2 + b & si\ x > 1 \end{cases}$$

Exercice 3. ***Valeur Absolue.***
Etudier la dérivabilité et l'existence de la droite tangente en $x = 0$ des fonctions f_1 et f_2 :

$$f_1(x) = |x| \text{ et } f_2(x) = x|x|$$

Exercice 4. ***Étude d'une fonction puissance***

1. *Déterminer le domaine de définition D de la fonction f donnée par $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ et déterminer les limites de f aux bornes de D.*
2. *Tracer le tableau de variation de f et donner le signe de f sur D.*

3. *Déterminer le domaine de définition de* $h(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x}}$.
4. *Calculer la dérivée de h et donner son tableau de variation avec les limites aux bornes de son domaine de définition.*

Exercice 5. ***Calcul de dérivées***
Dériver les fonctions suivantes (on précisera le domaine de définition et un ensemble sur lequel elle est dérivable) ainsi que les zeros de la fonction dérivée :

1. $f_1(x) = \frac{x-1}{x+2}$,
2. $f_2(x) = \frac{x}{x^2-1}$
3. $f_3(x) = \sqrt{x^3-3x+1}$
4. $f_4(x) = (4x^3-3x^2-6x+11)^{-4}$
5. $f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$,
6. $f_6(x) = \ln(1+x^6)$
7. $f_7(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$
8. $f_8(x) = (1+\ln x)^{3/2}$
9. $f_9(x) = \sqrt{e^x+1}$
10. $f_{10}(x) = (2+3x)^{\sqrt{x}}$

Exercice 6. ***Asymptotes obliques***
Déterminer l'équation des asymptotes à l'infini quand elles existent

$$a)\ f(x) = \frac{-3x+4}{2x+3} \qquad b) f(x) = \frac{x(2x-3)^2}{(x-2)^2} \qquad c)\ f(x) = \frac{2x^2+x\sqrt{x}}{x+3}$$

Exercice 7. ***Dérivées successives.***
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable à tout ordre et* g, h, i *les fonctions définies par* $g(x) = f(x^2)$, $h(x) = f(\frac{1}{x})$ *et* $i(x) = exp(f(x))$ *Calculer* $g', g'', g''', h', h'', h''', i', i'', i'''$ *en fonction de* f', f'', f'''.

Exercice 8. *Soit* $(a+ib)$ *une racine n-ième de l'unité et* $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$. *Donner une formule simple de la n-ième dérivée* $f^{(n)}$.

Exercice 9.
Proposition : Pour toute fonction f, *n-fois dérivables sur un intervalle* $[a,b]$, *il existe une fonction h sur* $[a,b]$ *telle que* $\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$ *et pour tout* $x, x_0 \in [a,b]$ *on a :*

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n h(x).$$

1. *Appliquer la formule à la fonction* f_1 *donnée par* $f_1(x) = e^x$ *en* $x_0 = 0$
2. *Appliquer la formule à la fonction* f_2 *donnée par* $f_2(x) = (\sin x)^3$ *en* $x_0 = 0$.
3. *En déduire*
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x^2/2}{(\sin x)^3}.$$

Exercice 10. ***Fonction réciproque trigonométrique***

1. *Donner le domaine de définition et l'ensemble image de la fonction*
$$x \to \arcsin x$$

2. *Donner les valeurs de* $\arcsin(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right))$ *et* $\arcsin(\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right))$.
3. *Les valeurs de*
$$\tan(\arctan(1/2)) \text{ et } \sin(\arcsin\frac{1}{3}).$$
4. *En exprimant* $\cos^2(x)$ *en fonction de* $\tan^2(x)$*, montrer que*
$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 11. ***Etude de fonction Réciproque***
Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\begin{cases} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1. *La fonction* f *est-elle continue en* $x = 0$ *?*
2. *Calculer la dérivée à droite et à gauche en* $x = 0$ *? La fonction* f *est-elle dérivable en* $x = 0$ *?*
3. *En utilisant un changement de variable, calculer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
4. *On considère la fonction* $g(x) = \frac{x}{x^2+1} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$*. Tracer le tableau de variation de la fonction* $g(x)$ *et déterminer son signe sur* $]0,+\infty[$.
5. *Déterminer la dérivée* $f'(x)$ *et déterminer son signe sur* $]0,+\infty[$ *. Tracer le tableau de variation de* $f(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.
6. *Tracer la fonction* $f(x)$.

Chapitre 5

Calcul intégral

I. Primitives

Dans ce qui suit, on considérera un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 5.1

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On dit que $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et vérifie : $\forall x \in \mathrm{I}, \mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Exemple 1. *La fonction* $\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3$ *est une primitive de la fonction* $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 3x^2$.

Proposition 5.1 – Existence d'une primitive (admise)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Proposition 5.2

Soit f une fonction continue sur I et F_0 une primitive de f sur I. Soit F une fonction dérivable sur I. Alors F est une primitive de F si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + k$.

Remarque. *Autrement dit, les primitives d'une fonction diffèrent d'une constante. Par ailleurs, comme les primitives ne sont pas uniques, on parle* ***d'une*** *primitive de f et non pas de* ***la*** *primitive de f.*

Démonstration. Supposons que F est une primitive de f. Alors, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(x) = f(x) = \mathrm{F}_0'(x)$.
Par conséquent, la fonction $\mathrm{F} - \mathrm{F}_0$ a une dérivée nulle sur I et elle est donc constante sur I.
Ainsi, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $(\mathrm{F} - \mathrm{F}_0)(x) = k$ et on en déduit donc que $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + k$.
Réciproquement, il est immédiat de vérifier que les fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{F}_0(x) + k$ ont pour dérivée f. □

Remarque. *Le fait que* I *soit un intervalle est primordial. On a en effet utilisé le fait que si une fonction a une dérivée nulle, alors elle est constante. Si l'ensemble de définition n'est pas un intervalle, ce résultat est faut.*
On peut par exemple penser à la fonction de Heaviside définie $\mathrm{H}(x) = 1$ *si* $x > 0$ *et* 0 *si* $x < 0$. *Sa dérivée est constante égale à* 0 *mais* H *n'est pas constante.*

II. Intégrales

---

1. Définition et premières propriétés

Définition 5.2

Soit f une fonction définie sur I admettant une primitive F sur I. Soient a et b des éléments de I, on définit alors

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

On note aussi :

$$\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b.$$

Remarque.

- *Dans l'expression* $\int_a^b f(x)d$, *la variable* x *est muette, elle signifie qu'on cherche une primitive de* f *par rapport à* x. *On peut donc remplacer par* t, s, u... *etc.*
- *Pour que la définition soit correcte, il faut démontrer qu'elle ne dépend pas de la primitive* F *choisie. Or, cela est bien le cas car, d'après la proposition 5.2, deux primitives diffèrent d'une constante. Ainsi, si* F_1 *et* F_2 *sont deux primitives de* f, *alors* $\mathrm{F}_1(b) - \mathrm{F}_1(a) = \mathrm{F}_2(b) - \mathrm{F}_2(a)$.

Théorème 5.3 – (admis)

La quantité $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ donne l'aire algébrique sous le graphe de la fonction f, comprise entre a et b.

Proposition 5.4

Soit f une application continue sur I et soit $a \in \mathrm{I}$.

L'application $\mathrm{F} : x \in \mathrm{I} \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration. Soit G une primitive de f. Alors, par définition de l'intégrale, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(a)$. Par conséquent, $\mathrm{F}' = \mathrm{G}' = f$ et F est bien une primitive de f. De plus, $\mathrm{F}(a) = \mathrm{G}(a) - \mathrm{G}(a) = 0$. On a donc montré que F est une primitive de f qui s'annule en a.

Montrons maintenant l'unicité. Supposons qu'il existe une autre primitive $\tilde{F}$ de f qui s'annule en a.
D'après la proposition 5.2, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F = \tilde{F} + k$. En évaluant pour $x = a$, on obtient $F(a) = \tilde{F}(a) + k$ et donc $k = 0$, d'où $F = \tilde{F}$. □

Remarque. *Comme la fonction* $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *est la primitive de* f *qui s'annule en a, on notera souvent* $\int f(x)dx$ *(sans préciser les bornes de l'intégrale) l'ensemble des primitives de* f*. Il ne faut pas oublier que cela signifie* $\int_a^x f(t)dt$ *pour a quelconque.*

Exemple 2. *Calculer* $\int e^{2x}dx$.

Solution : $\int e^x dx = \frac{1}{2}e^x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Les propriétés suivantes sont admises même si elles s'interprètent facilement en terme d'aire sous la courbe (la relation de Chasles par exemple).

Proposition 5.5 – (admise)

Soient f, g des fonctions continues sur I, et a, b, c des éléments de I.

1. **Relation de Chasles.** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
2. **Positivité de l'intégrale.** Si f est positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.
3. **Croissance de l'intégrale.** Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.
4. **Linéarité de l'intégrale.** Pour tous λ, μ réels, on a :
$$\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx.$$
5. **Inégalité triangulaire.** $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.

De plus, dès lors que la fonction à intégrer possède certaines propriétés particulières, on peut se ramener à un calcul simplifié de l'intégrale.

Proposition 5.6

Soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b des éléments de I.

- Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
- Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Si f est T-périodique alors $\displaystyle\int_{a+k\mathrm{T}}^{b+k\mathrm{T}} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$ pour tout entier k.

Exemple 3. *Calculer* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$.

Solution :
La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ *est impaire sur* $[-1;1]$ *donc*

$$\int_{-1}^{1} \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx = 0.$$

2. Intégration par parties

Définition 5.3

On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$ si f est dérivable sur $[a,b]$ et si f' est une fonction continue sur $[a,b]$.

Théorème 5.7

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$ alors :

$$\int_{a}^{b} u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_{a}^{b} u'(t)v(t)\,dt.$$

Exemple 4. *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 te^t dt$.

Solution :
On procède par intégration par parties en posant u et v (de classe $\mathscr{C}^1$ *sur* $[0;1]$ *telles que :*

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^t \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1 - 1 = 0.$$

Exemple 5. *Calculer* $\int \ln(x)dx$.

Solution : Soit $a \in]0;+\infty[$ *et soit* $x \in]0;+\infty[$. *On veut calculer* $\int_a^x \ln(t)dt$. *On procède par intégration par parties en posant* u *et* v *(de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]0;+\infty[$ *telles que :*

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = t \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_a^x \ln(t)dt = [t\ln(t)]_a^x - \int_a^x 1 = x\ln(x) - x + a\ln(a) - a$$

Au final, l'ensemble des primitives cherchées sont :

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Remarque. *Lorsqu'on calcule des primitives par intégration par parties, on pourra omettre de noter les bornes. Dans l'exemple précédent, la quantité* $a\ln(a) - a$ *est de toute façon intégrée dans la constante* k. *Ainsi, on écrira :*

$$\int \ln(x)dx = [x\ln(x)] - \int 1dx = x\ln(x) - x + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

3. Changement de variables

Théorème 5.8

Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$ et $g : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(u)\,du = \int_a^b \varphi'(t).g\left(\varphi(t)\right)\,dt.$$

Exemple 6. *Calculer* $\mathrm{I} = \int_0^2 \frac{du}{1+\sqrt{u}}$.

Solution :
L'idée générale est de faire le changement de variable $t = \sqrt{u}$.
On pose $\varphi(t) = t^2$ *pour* $t \in [0;\sqrt{2}]$ *(*$a = 0$ *et* $b = \sqrt{2}$*). On pose également* $g(u) = \frac{1}{1+\sqrt{u}}$ *pour tout* $u \in \phi\left([0\sqrt{2}]\right) = [0;2]$. *Ainsi, on obtient :*

$$\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{u}}du = \int_0^{\sqrt{2}} \varphi'(t)\frac{1}{1+\sqrt{\varphi(t)}}dt = \int_0^{\sqrt{2}} 2t \times \frac{1}{1+\sqrt{t^2}}dt = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t}{1+t}dt$$

On verra dans la partie suivante comment calculer ensuite l'intégrale d'une fraction rationnelle. Pour ce qui est de cet exemple, on se contentera d'utiliser l'astuce suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t+2-2}{1+t}dt = \int_0^{\sqrt{2}} 2 + \frac{1}{1+t}dt = \Big[2t + \ln|1+t|\Big]_0^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}).$$

Remarque.

- *En pratique, on écrira simplement « on pose $t = \sqrt{u}$ » en vérifiant que la fonction ϕ donnant l'ancienne variable en fonction de la nouvelle (la fonction carrée ici) est bien de classe $\mathscr{C}^1$.*
- *La difficulté provient du fait que le théorème s'applique avec l'application ϕ qui est la réciproque de l'application racine carrée qui est la changement de variable « naturel » à effectuer.*
- *Par ailleurs, en écrivant que $u = \varphi(t)$ et en utilisant la notation « des physiciens » pour la dérivée, on a $\dfrac{du}{dt} = \varphi'(t)$. On peut ainsi retenir que $du = \varphi'(t)dt$ (bien que cela n'ait pas de sens mathématique) et que pour effectuer un changement de variable, il s'agit donc de remplacer « du » par son expression en fonction de t.*
- *Pour effectuer un changement de variable, on n'a pas besoin que ϕ soit injective. Cependant, on préfère souvent définir φ en définissant son application réciproque ϕ^{-1} (comme c'est le cas ci-dessous) et on utilise donc une application ϕ bijective.*

Autre rédaction de l'exemple 6 :
On souhaite calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^2 \frac{du}{1+\sqrt{u}}$. *On pose* $t = \sqrt{u}$.

- *Le changement de variable $u = t^2$ est bien $\mathscr{C}^1$*
- $\dfrac{dt}{du} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} = \dfrac{1}{2t}$ *donc* $du = 2t\,dt$.
- *Lorsque u va de 0 à 2, t va de 0 à $\sqrt{2}$.*

Ainsi, on obtient :

$$\mathrm{I} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}dt.$$

et on conclut ensuite de la même manière que dans l'exemple 6.

Exemple 7. *Calculer* $\displaystyle\int \frac{1}{2x\ln(x)+x}dx$ *sur* $]1;+\infty[$.

Solution :
Soit $a \in]1;+\infty[$, *soit* $x \in]1;+\infty[$. *On cherche à calculer* $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{2t\ln(t)+t}dt$.
On pose $u = \ln(t)$.

- *Le changement de variable $t = e^u$ est bien $\mathscr{C}^1$*
- $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{e^u}$ *donc* $dt = e^u du$.
- *Lorsque t va de a à x, u va de $\ln(a)$ à $\ln(x)$.*

Ainsi,

$$\int_a^x \frac{1}{2t\ln(t)+t}dt = \int_{\ln(a)}^{\ln(x)} \frac{e^u}{2ue^u+e^u}du = \int_{\ln(a)}^{\ln(x)} \frac{1}{2u+1} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+2\ln(x)) - \ln(1+2\ln(a))\right)$$

Par conséquent les primitives cherchées sont les fonctions de la forme :

$$\frac{1}{2}\ln(1+2\ln(x)) + k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

.

Remarque. *Là aussi, on peut omettre de noter les bornes des intégrales. On veillera cependant à ce que le changement de variable ($t = e^u$ ici) soit bien surjectif sur* $]1\,;+\infty[$ *afin pour toute valeur de* $x \in]1\,;+\infty[$*, il existe un antécédent (à placer dans la borne de la nouvelle intégrale.*

Autre rédaction de l'exemple 7 :
On souhaite calculer $\displaystyle\int \frac{1}{2x\ln(x)+x}dx$ *sur* $]1\,;+\infty[$.
On pose $u = \ln(t)$.

- *Le changement de variable* $x = e^u$ *est bien* $\mathscr{C}^1$ *et surjectif de* $]0\,;+\infty[$ *dans* $]1\,;+\infty[$.
- $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{e^u}$ *donc* $dx = e^u du$.

Ainsi,

$$\int \frac{1}{2x\ln(x)+x}dx = \int \frac{e^u}{2ue^u+e^u}du = \int \frac{1}{2u+1} = \frac{1}{2}\ln|1+2u|+k = \frac{1}{2}\ln(1+2\ln(x))+k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

III. Primitives de fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes. Pour déterminer une primitive d'une fraction rationnelle, on utilise une méthode de décomposition en éléments simples. On ne donnera pas de résultat théorique à ce sujet mais on illustrera certaines techniques à travers des exemples de plus en plus sophistiqués.

Exemple 8. *Calculer* $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x-5)}dx$.

Solution :
On cherche a et b tels que

$$\frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-5} \quad (\star)$$

En multipliant l'égalité $(\star)$ *par* $x-2$ *puis en posant* $x = 2$*, on obtient :*

$$\frac{1}{2-5} = a + \frac{b(2-2)}{2-5}$$

et donc $a = \dfrac{1}{-3}$.
De même, en multipliant l'égalité $(\star)$ *par* $x-5$ *puis en posant* $x = 5$*, on obtient :* $b = \dfrac{1}{3}$.
Au final,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-5)}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-5} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right| + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Exemple 9. *Calculer* $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2+x-2}dx$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x}{x^2+x-2}dx &= \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+x-2}dx \\
&= \frac{5}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x-2}dx \\
&= \frac{5}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+x-2}dx \\
&= \frac{5}{2}\ln\left|x^2+x-2\right| - \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx
\end{aligned}$$

On calcule ensuite $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx$ *en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples. On cherche a, b tels que*

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

En multipliant l'égalité par $x-1$ *et en posant* $x=1$*, on obtient* $a = \frac{1}{3}$.
De même, en multipliant l'égalité par $x+2$ *et en posant* $x=-2$*, on obtient* $b = \frac{-1}{3}$.
Ainsi,

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Au final, on a donc :

$$\int \frac{5x}{x^2+x-2}dx = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+x-2\right| - \frac{5}{6}\ln|x-1| + \frac{5}{6}\ln|x+2| + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Exemple 10. *Calculer* $\int \frac{1}{4x^2+20x+29}dx$.

Solution :
Le polynôme $4x^2+20x+29$ *n'admet pas de racine réelle. On va néanmoins le mettre sous forme canonique :*

$$4x^2+20x+29 = (2x+5)^2+4$$

Ainsi, $\int \frac{1}{4x^2+20x+29}dx = \int \frac{1}{(2x+5)^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+5}{2}\right)+1}dx.$

On pose $u = \frac{2x+5}{2}$.

- *Le changement de variable est bijectif et* $\mathscr{C}^1$.
- $du = dx$

Par conséquent,

$$\int \frac{1}{4x^2+20x+29}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{4}\arctan(u) = \frac{1}{4}\arctan\left(x+\frac{5}{2}\right) + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Méthode – Primitive de fractions rationnelles

On souhaite déterminer une primitive d'une fraction rationnelle de la forme

$$f(x) = \frac{\mathrm{P}(x)}{ax^2+bx+c}$$

- On effectue une division euclidienne pour se ramener au cas où P est de degré 1.
- En ajustant les coefficient, on fait apparaitre $\frac{u'}{u}$ (où $u(x) = ax^2+bx+c$), il reste un terme de la forme $\frac{d}{ax^2+bx+c}$ (où $d \in \mathbb{R}$).
  - Si $\Delta > 0$, (en notant x_1 et x_2 les deux racines), on utilise une décomposition en élément simple en déterminant des coefficients A et B tels que

$$\frac{d}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\mathrm{A}}{x-x_1} + \frac{\mathrm{B}}{x-x_2}$$

  - Si Δ est nul, on détermine une primitive de $\frac{d}{a(x-x_0)^2}$.
  - Si $\Delta < 0$, on utilise un changement de variables pour se ramener à une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$ et on utilise arctan

Exemple 11. *Calculer* $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2-2x+1}{x^2-3x+2}dx$.

Solution :
On effectue la division euclidienne :

$$x^3+3x^2-2x+1 = (x^2-3x+2)(x+6)+14x-11$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+3x^2-2x+1}{x^2-3x+2}dx &= \int x+6dx + \int \frac{14x-11}{x^2-3x+2}dx \\
&= \frac{x^2}{2}+6x+7\int \frac{2x-\frac{11}{7}-3+3}{x^2-3x+2}dx \\
&= \frac{x^2}{2}+6x+7\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx + 10\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx \\
&= \frac{x^2}{2}+6x+7\ln\left|x^2-3x^2\right| + 10\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx \\
&= \frac{x^2}{2}+6x+7\ln\left|x^2-3x^2\right| - 10\int \frac{1}{(x-1)}dx + 10\int \frac{1}{(x-2)}dx \\
&= \frac{x^2}{2}+6x+7\ln\left|x^2-3x^2\right| - 10\ln|x-1| + 10\ln|x-2| + k \quad (k \in \mathbb{R}) \\
&= \frac{x^2}{2}+6x-3\ln|x-1|+17\ln|x-2|+k \quad (k \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

IV. Primitives de fonctions trigonométriques

Pour intégrer des fonctions faisant intervenir des fonctions trigonométriques, il est possible d'utiliser le changement de variable $u = \tan(\theta/2)$. La proposition suivante permet de voir qu'avec un tel changement de variable, on se ramène à intégrer une fraction rationnelle.

Proposition 5.9

Avec $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

- $\sin(\theta) = \dfrac{2u}{1+u^2}$
- $\cos(\theta) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$
- $\tan(\theta) = \dfrac{2u}{1-u^2}$

Démonstration.
$\sin(\theta) = \sin\left(2\dfrac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 2\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

De plus, $\cos(\theta) = \cos\left(2\dfrac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} - 1 = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

Enfin, on obtient l'expression de $\tan(\theta)$ en écrivant $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. □

Méthode – Primitives de fonctions trigonométriques

Pour calculer une intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_a^b f(\theta)d\theta$ où f est définie avec des fonctions trigonométriques :

- Si la fonction est une puissance de sin et de cos, on linéarise.
- Sinon, on essaye les règles de Bioche (avec $\omega(\theta) = f(\theta)d\theta$) :
  - Si $\omega(-\theta) = \omega(\theta)$, on pose $u = \cos(\theta)$
  - Si $\omega(\pi-\theta) = \omega(\theta)$, on pose $u = \sin(\theta)$
  - Si $\omega(\pi+\theta) = \omega(\theta)$, on pose $u = \tan(\theta)$
- Dans tous les autres cas, on pose $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Exemple 12. *Calculer* $\int \cos^3(x)dx$.

Solution :

On commence par linéariser.

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\\ &= \frac{(e^{ix})^3+3(e^{ix})^2e^{-ix}+3e^{ix}(e^{-ix})^2+(e^{-ix})^3}{8}\\ &= \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}\\ &= \frac{1}{4}\times\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ &= \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int\cos^3(x)dx = \frac{1}{4}\int\cos(x)dx+\frac{3}{4}\int\cos(3x) = \frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{1}{4}\sin(3x)+k \quad (k\in\mathbb{R}).$$

Exemple 13. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3(\theta)}{1+\cos^2(\theta)}d\theta.$

Solution : Les règles de Bioche nous mène à poser $u=\cos(\theta)$.
(en effet, $\omega(-\theta)=\dfrac{\sin^3(-\theta)}{1+\cos^2(-\theta)}d(-\theta)=\omega(\theta)$*)*
Le changement de variable est $\mathscr{C}^1$.
On a $du=-\sin(\theta)d\theta$.
De plus, lorsque θ *va de* 0 *à* $\frac{\pi}{4}$*, u va de* 1 *à* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3(\theta)}{1+\cos^2(\theta)}d\theta = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{-(1-u^2)}{1+u^2}du = \ldots = -1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}-2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exercices

Exercice 1. *Calculer les intégrales suivantes (en vérifiant que l'intervalle sur lequel on intègre est bien contenu dans le domaine où la fonction à intégrer est définie et continue).*

$$\int_2^3(3t^2+1)\,dt,\quad \int_0^{\pi/4}\frac{5}{\cos^2 t}\,dt,\quad \int_{-1}^2|t|\,dt,\quad \int_0^1\frac{t}{t-2}\,dt,$$
$$\int_0^1\frac{t}{2t+1}\,dt,\quad \int_0^{\pi/4}\frac{\arctan t}{1+t^2}dt,\quad \int_1^2\frac{\ln^3 t}{t}\,dt,\quad \int_0^1\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt.$$

Exercice 2. *Primitives usuelles Calculer une primitive de la fonction :*

1. $f_1(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^2$,
2. $f_2(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^3-3x+1}}$
3. $f_3(x) = \frac{2x^2-x-1}{(4x^3-3x^2-6x+11)^5}$
4. $f_4(x) = \frac{x^5}{1+x^6}$,
5. $f_5(x) = \frac{\sin x}{2-\cos x}$.
6. $f_6(x) = \frac{\sin(\arctan x)}{1+x^2}$
7. $f_7(x) = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$
8. $f_8(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2(x)}$

Exercice 3. *Intégration par parties I A l'aide d'une intégration par parties, calculer les primitives suivantes :*

$$\int_0^1 x^2 e^x dx \text{ et } \int_0^e x^2 \ln x dx$$

Exercice 4. *Intégration par parties II Déterminer une primitive des fonctions suivantes par une intégration par parties :*

$$x \mapsto \arctan(x) \quad x \mapsto (\ln x)^2 \quad x \mapsto \sin(\ln x),$$

Exercice 5. *On considère la fonction* $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. *Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout* $x \in [1,2]$, *on a :* $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$
2. *Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale* $\mathrm{J} = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$.
3. *Calculer l'intégrale* $\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$ *(on fera une intégration par partie).*

Exercice 6. *Changement de variable I*
En effectuant le changement de variable demandé, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$ *en posant* $x = \sqrt{t}$.
2. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt$ *en posant* $x = \cos t$.
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{2t\ln(t)+t}$ *en posant* $x = \ln t$.

Exercice 7. *Changement de variable II*
En effectuant le changement de variable demandée, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}$ *en posant* $x = e^t$.
2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$ *en posant* $x = \sqrt{t}$.
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ *en posant* $t = \sin\theta$.

Exercice 8. *Primitives de fractions rationnelles*
Calculer les primitives des fonctions f_i *:*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x^3-2x}{x+1}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{4x^2-4x-3}, \\ f_3(x) &= \frac{x^2-4x+6}{x^2+1}, \end{aligned}$$

Exercice 9. *Fraction rationnelle*
Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{x^4+1}{(x-2)^3}$.

Exercice 10.

1. *Donner les primitives* $\displaystyle\int^x \cos^2 t\, dt$ *et* $\displaystyle\int^x \cos^4 t\, dt$
2. *Exprimer* $\sin(4t)$ *en fonction de* $\tan(t)$.
3. *Calculer la primitive* $\displaystyle\int^x \frac{1}{(1+u^2)^2}\, du$
4. *Calculer la primitive* $\displaystyle\int^x \frac{1}{(1+u^2)^3}\, du$
5. *Calculer la primitive* $\displaystyle\int^x \frac{1}{(u^2+u+1)^2}\, du$
6. *En intégrant par parties, donner une relation de récurrence entre les primitives suivantes et retrouver les résultats précédents*

$$\mathrm{I}_{n+1} := \int^x \frac{1}{(1+u^2)^{n+1}}\, du \text{ et } \mathrm{I}_n := \int^x \frac{1}{(1+u^2)^n}\, du$$

Exercice 11.

1. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 2t\, dt$.
2. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 2t\, dt$.
3. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t} \cos(2t)\, dt$.