Chapitre 4

Fonctions réciproques et dérivation

I. Rappels sur la dérivation

1. Définition et généralités

Définition 4.1

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$. On dit que f est dérivable en a si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe,}$$

et on note $f'(a)$ cette limite, appelée nombre dérivé de f en a.

Proposition 4.1

Soit f une fonction dérivable en a. L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Proposition 4.2

Si g est dérivable en a et si f est dérivable en $g(a)$, alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \times g'(a).$$

Exemple 1. *Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction* $h : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$. *Calculer ensuite sa dérivée.*

Solution : On a $h(x)$ *est définie si* $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ \text{et} \\ \dfrac{x+1}{x-2} \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in]-\infty;-1] \cup]2;+\infty[.$

De plus, h est dérivable en x si x vérifie $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ \text{et} \\ \dfrac{x+1}{x-2} \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[.$

Cela signifie donc que l'ensemble de définition de h est $]-\infty;-1] \cup]2;+\infty[$ *et son ensemble de dérivabilité est* $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$.
Enfin pour calculer $h'(x)$, *on pose* $f(x) = \sqrt{x}$ *(pour* $x > 0$*) et* $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ *(pour* $x \in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$*). On a donc* $h(x) = f \circ g(x)$.
Par conséquent,

$$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}} \times \frac{-3}{(x-2)^2} = \frac{-3}{2(x-2)\sqrt{(x+1)(x-2)}}.$$

Définition 4.2

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, ou de manière équivalente si $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

Proposition 4.3 – (admise)

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

2. Application aux calculs de limites

Proposition 4.4

Si $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en x_0, alors il existe une fonction $h : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + h(x)(x-x_0)$$

et telle que $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 0$.

Démonstration. Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en x_0.
On pose, pour tout $x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\}$, $h(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ et $h(x_0) = 0$. Alors, on montre facilement que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + h(x)(x-x_0)$.
De plus, le fait que $h(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ découle directement de la définition du nombre dérivé $f'(x_0)$. $\square$

Remarque. *Dans un calcul de limite, la proposition 4.4 permet de remplacer une fonction par l'expression de sa tangente en négligeant le terme* $h(x)(x-x_0)$. *C'est par exemple ce qui est fait dans le calcul de limite qui suit.*

Exemple 2. *Calculer* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+5x)}{4x}$.

Solution :
En considérant la fonction $f(x) = \ln(1+5x)$ *définie sur* $\left]-\frac{1}{5};+\infty\right[$ *et en appliquant la proposition 4.4 en* $x_0 = 0$*, on sait qu'il existe une fonction* h *telle que* $\lim_0 h = 0$ *et telle que :*

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{5};+\infty\right[, \quad \ln(1+5x) = f(1) + f'(1)x + h(x)x = 5x + h(x)x.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{5};+\infty\right[, \quad \frac{\ln(1+5x)}{4x} = \frac{5}{4} + h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{5}{4}.$$

car $h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. *On pourra retenir qu'au voisinage de* 0, $\ln(1+x) \simeq x$ *(la tangente en* 0 *de cette fonction est la droite d'équation* $y = x$*). Ici, l'utilisation de la proposition* **??** *permet simplement d'écrire rigoureusement que, au voisinage de* 0,

$$\frac{\ln(1+5x)}{4x} \simeq \frac{5x}{4x} \simeq \frac{5}{4}.$$

II. Fonctions réciproques

Définition 4.3

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ une fonction. On dit que f est bijective si pour tout $y \in \mathrm{J}$, il existe un unique $x \in \mathrm{I}$ tel que $y = f(x)$.

Proposition 4.5

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$. f est bijective si, et seulement si, il existe $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ telle que $g \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{I}}$ et $f \circ g = \mathrm{I}d_{\mathrm{J}}$.

Démonstration. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application.

- Supposons que f est bijective. On définit l'application $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ de la façon suivante :
  Pour tout $y \in \mathrm{F}$, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f.
  g est bien défini car cet antécédent appartient à E.
  Montrons maintenant que $g \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$.
  Soit $x \in \mathrm{E}$,
  $g \circ f(x) = g(f(x))$.
  Or, x est un antécédent de $f(x)$ par f (c'est le seul car f est bijective) donc, par définition de g, on a $g \circ f(x)$.
  De même, montrons que $f \circ g = \mathrm{I}d_{\mathrm{F}}$.
  Soit $y \in \mathrm{F}$,
  $f \circ g(y) = f(g(y))$.
  Or, par définition de y, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f. Son image par f est donc y et on a bien $f \circ g(y) = y$.

- Réciproquement, supposons qu'il existe $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$.
  Comme l'identité est bijective, on sait donc que $g \circ f$ est injective et donc que f est injective (la preuve du fait que f est injective est laissée au lecteur).
  De même, $f \circ g$ est surjective et on en déduit que f est surjective.
  Ainsi, f étant injective et surjective, elle est bijective.

- Montrons enfin que l'application g est unique. Supposons qu'il existe deux applications g_1 et g_2 telles que $g_1 \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $f \circ g_1 = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$ d'une part et $g_2 \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et telle que $f \circ g_2 = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$ d'autre part.
  Supposons par l'absurde que $g_1 \neq g_2$.
  Il existe $y \in \mathrm{F}$ tel que $g_1(y) \neq g_2(y)$.
  Par conséquent, $f(g_1(y)) \neq f(g_2(y))$ car f est injective.
  Donc $\mathrm{Id}_\mathrm{F}(y) \neq \mathrm{Id}_\mathrm{F}(y)$, ce qui implique que $y \neq y$, ce qui est absurde.

$\square$

Remarque. *La fonction g est appelée la réciproque de f et est notée f^{-1}.*

Remarque. *Attention, l'application f^{-1} existe uniquement dans le cas où f est bijective. L'image réciproque d'un ensemble* J*, notée* $f^{-1}(\mathrm{J})$*, existe néanmoins sans condition sur* f*.*

Théorème 4.6 – des valeurs intermédiaires

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathrm{J}$ une fonction **continue**. Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, l'équation $f(x) = y$ admet (au moins) une solution $x \in [a, b]$.

Remarque. *Autrement dit, la fonction f est surjective de $[a ; b]$ sur $[f(a) ; f(b)]$. Cela ne signifie cependant pas qu'elle soit bijective (certains éléments peuvent avoir plusieurs antécédents). Il faut prendre alors une hypothèse plus contraignante sur la fonction f pour forcer la bijectivité.*

Théorème 4.7 – de la bijection

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors, $f : \mathrm{I} \to f(\mathrm{I})$ est une bijection.

Remarque. *En prenant* $\mathrm{I} = [a, b]$*, on retrouve ce que l'on appelle le « corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires ».*

III. Régularité de la fonction réciproque

Proposition 4.8

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une bijection. Si f est monotone alors f^{-1} est monotone, de même monotonie. Autrement dit :

- si f est croissante alors f^{-1} est croissante.
- si f est décroissante alors f^{-1} est décroissante.

Démonstration. On traite le cas où f est croissante, le cas décroissant étant similaire et laissé au lecteur. On commence par remarquer que si f est bijective et croissante sur I, alors f est strictement croissante sur I (la preuve de ce résultat est laissée au lecteur).
Montrons ensuite que f^{-1} est croissante. Soient $c, d \in \mathrm{J}$ tels que $c \leqslant d$. Alors on va montrer que $f^{-1}(c) \leqslant f^{-1}(d)$. Supposons par l'absurde que $f^{-1}(c) > f^{-1}(d)$. Comme f est strictement croissante, on en déduit que $f\left(f^{-1}(c)\right) > f\left(f^{-1}(d)\right)$ et donc que $c > d$, ce qui est absurde.
Ainsi, on a montré que f^{-1} est croissante. □

Remarque. *La même preuve permet de montrer que f^{-1} est même strictement monotone.*

Exemple 3. *La fonction exponentielle est strictement croissante et donc la fonction logarithme (définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle) est strictement croissante.*

Proposition 4.9 – Représentation graphique

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une fonction bijective. Alors la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Démonstration. On utilise le fait que le symétrique d'un point $\mathrm{M}(x; y)$ par rapport à la première bissectrice est le point $\mathrm{M}'(y; x)$.
Ainsi, pour tout $(x; y) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x;y) \in \mathscr{C}_f &\iff y = f(x) \\ &\iff x = f^{-1}(y) \\ &\iff \mathrm{M}'(y;x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}} \end{aligned}$$

□

Exemple 4. *Les courbes des fonctions carrées et racines carrées définies sur $\mathbb{R}^+$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice. Idem pour les fonctions exponentielle et logarithme.*

Proposition 4.10 – (admise)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une bijection. Si f est continue sur I, alors f^{-1} est continue sur J.

Proposition 4.11

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une bijection. Supposons que f est dérivable sur I de dérivée qui ne s'annule pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall y \in \mathrm{J}, \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Remarque. *La fonction f^{-1} n'est pas dérivable en les points $y = f(x)$ pour lesquels $f'(x) = 0$. Cela se traduit graphiquement par le fait que, la courbe de f ayant une tangente horizontale en x, la courbe de $f^{(-1)}$ a une tangente verticale en y.*

Démonstration. Soit $y, y_0 \in \mathrm{J}$. Soient $x, x_0 \in \mathrm{I}$ tels que $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. On s'intéresse au taux de variation $\dfrac{f^{(-1)}(y) - f^{(-1)}(y_0)}{y - y_0}$ lorsque y tend vers y_0 (c'est-à-dire lorsque x tend vers x_0).

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(-1)}(y) - f^{(-1)}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\
&\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{(car } f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0) \neq 0\text{)} \\
&= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Exemple 5. *Dérivée de la fonction* ln.

Si $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction exponentielle, alors $f^{-1} : y \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto \ln(y) \in \mathbb{R}$ est sa réciproque.
Pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}.$$

Exemple 6. *Dérivée de la fonction racine carrée.*

Si $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction carrée, alors $f^{-1} : x \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ est sa réciproque (la fonction racine carrée).
Pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

IV. Fonctions trigonométriques réciproques

Pour chaque fonction trigonométrique (cos, sin, tan), on va déterminer un ensemble sur lequel elles sont bijectives puis on va étudier leur fonction réciproque (nommées arccos, arcsin, arctan) en étudiant les propriétés suivantes de ces fonctions :

- Ensemble de définition
- Parité
- Variations
- Dérivabilité
- Dérivée
- Limites

1. Fonction arcsin

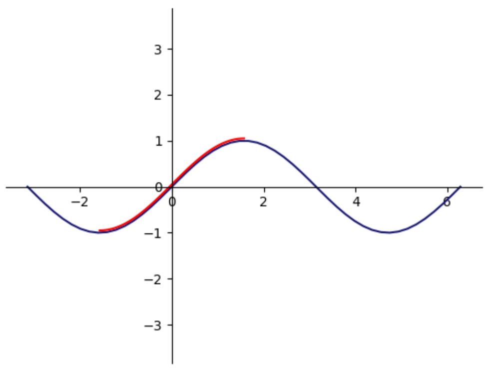
La fonction sin est périodique, donc la fonction n'est clairement pas injective sur $\mathbb{R}$. Il faut donc restreindre le domaine pour qu'elle soit bijective.

Soit $f : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto \sin(x) \in [-1,1]$.
On a alors :

- f est continue
- f est strictement croissante
- $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Donc d'après le théorème de la bijection (théorème 4.7), f est bijective.

Remarque. *La figure ci-dessous représente la fonction sinus (en bleu) et sa restriction à l'intervalle* $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *(en rouge).*



Définition 4.4

On définit arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction réciproque de la fonction f.
Cela signifie que :

- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$.
- $\forall y \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin y) = y$

Remarque. *Attention ! La première égalité n'est pas vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par exemple,*

$$\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \arcsin(-1) = \frac{-\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2}.$$

Proposition 4.12

- La fonction arcsin est impaire.
- la fonction arcsin est continue et croissante sur $[-1,1]$,
- la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée

$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\cos\circ\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin\arcsin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Démonstration. La preuve du premier point est laissée au lecteur. Les deux autres points résultent des résultats généraux de la partie précédente. □

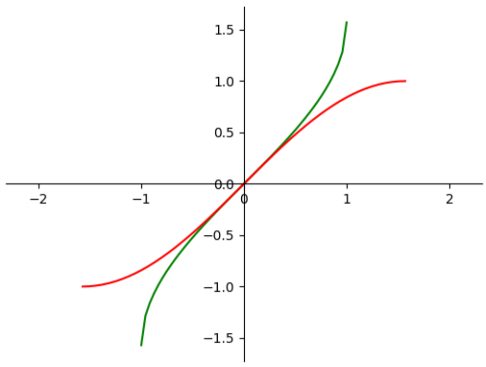
De plus, à partir des valeurs remarquables de la fonction sin, on a un certain nombre de valeurs remarquables de arcsin. Par exemple, $\arcsin(\sqrt{2}/2) = 1/2$.

Proposition 4.13

- $\lim\limits_{x \to -1} \arcsin(x) = -\dfrac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Démonstration. Cela résulte directement de la continuité de la fonction arcsin. □

Remarque. *La figure ci-dessous représente la fonction sinus sur* $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *(en rouge) et la fonction arcsin sur* $[-1;1]$ *(en vert). Les deux courbes sont les symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice. De plus, on voit que la courbe de la fonction arcsin admet deux tangentes verticales (en* -1 *et* 1*) car* $\sin'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.



2. Fonction arccos

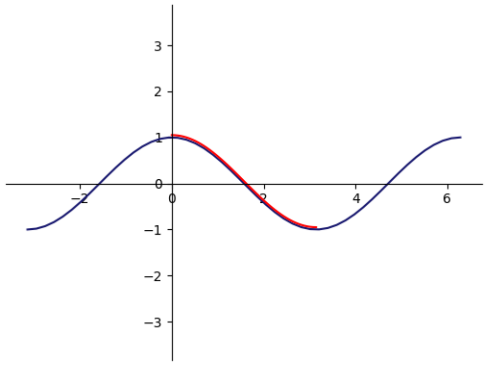
Comme pour la fonction sinus, il faut restreindre le domaine de la fonction cosinus pour qu'elle soit bijective.

Soit $f : x \in [0;\pi] \longmapsto \cos(x) \in [-1,1]$.
On a alors :

- f est continue
- f est strictement décroissante
- $f(0) = 1$
- $f(\pi) = -1$

Donc d'après le théorème de la bijection (théorème 4.7), f est bijective.

Remarque. *La figure ci-dessous représente la fonction cosinus (en bleu) et sa restriction à l'intervalle* $[0;\pi]$ *(en rouge).*



Définition 4.5

On définit arccos : $[-1,1] \to [0;\pi]$ la fonction réciproque de la fonction f.
Cela signifie que :

- $\forall x \in [0;\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$.
- $\forall y \in [-1,1]$, $\cos(\arccos y) = y$

Remarque. *Attention ! Comme pour arcsin, la première égalité n'est pas vérifiée pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.14

- la fonction arccos est continue et décroissante sur $[-1,1]$,
- la fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée

$$(\arccos)'(y) = \frac{1}{-\sin \circ \arccos y} = -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos\arccos y)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

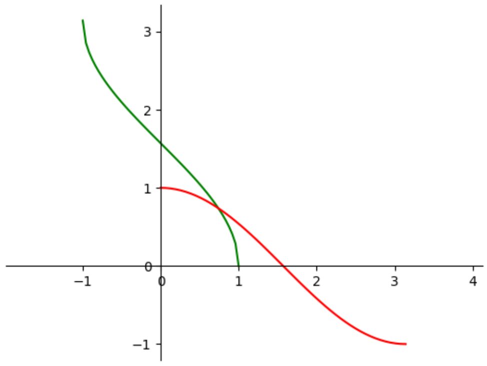
Remarque. *La fonction* arccos *est ni paire, ni impaire étant donné que* $f(1) = 0$ *et* $f(-1) = \pi$.

Proposition 4.15

- $\lim\limits_{x\to -1} \arccos(x) = -\dfrac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Démonstration. Cela résulte directement de la continuité de la fonction arccos. □

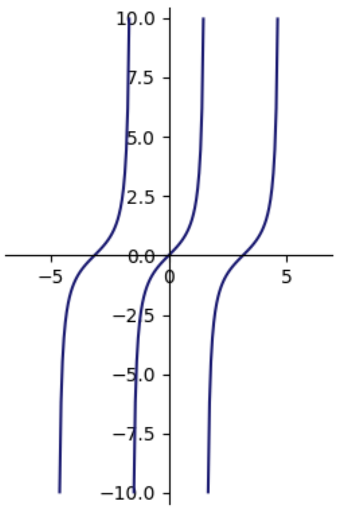
Remarque. *La figure ci-dessous représente la fonction cosinus sur* $[0;\pi]$ *(en rouge) et la fonction arccos sur* $[-1;1]$ *(en vert). Là aussi, les deux courbes sont les symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice et on voit que les tangentes verticales en* 1 *et en* -1 *traduisent la non-dérivabilité de arccos en ces points.*



3. Fonction arctan

A priori, la fonction tangente est définie sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$. Elle n'est cependant pas injective. On va donc la restreindre à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque. *La figure suivante représente la courbe de la fonction tangente.*



Soit $f : x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\longmapsto \tan(x) \in \mathbb{R}$.
On a alors :

- f est continue
- f est strictement croissante
- $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$

Donc d'après le théorème de la bijection (théorème 4.7), f est bijective.

Définition 4.6

On définit $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction réciproque de la fonction f.
Cela signifie que :

- $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$.
- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan y) = y$

Proposition 4.16

- La fonction arctan est impaire.
- la fonction arctan est continue et croissante sur $[-1, 1]$,
- la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$(\arctan)'(y) = 1 + \tan^2\big(\arctan(y)\big) = \frac{1}{1+y^2}.$$

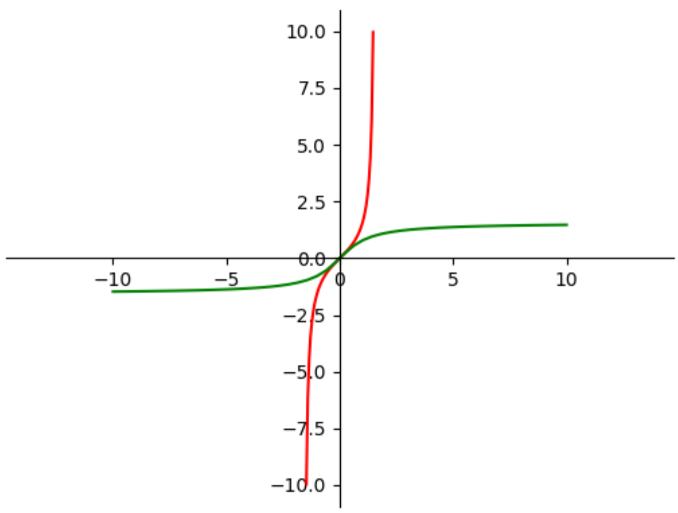
Démonstration. La preuve du premier point est laissée au lecteur. Les deux autres points résultent des résultats généraux de la partie précédente. □

On retiendra la valeur remarquable suivante : $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ car $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Proposition 4.17

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

Remarque. *La figure ci-dessous représente la fonction tan sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *(en rouge) et la fonction arctan sur* $\mathbb{R}$ *(en vert).*



Exercices

Exercice 1. 1. *En calculant les constantes* a_0 *et* a_1 *pour des fonctions dérivables dans l'expression* $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)h(x)$ *avec* $\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$ *déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{\tan(2x^2 - 8)}{x^2 - 4}$$

2. *Déterminer l'équation de la droite tangente des fonctions* f *et* g *données par* $f(x) = \ln(1+3x)$ *et* $g(x) = \sin(3x)$ *en* $x = 0$.

Exercice 2. 1. *Déterminer l'équation de la droite tangente aux courbes des fonctions* f *et* g *données par* $f(x) = \sqrt{x}$ *et* $g(x) = ax^2 + b$ *en* $x = 1$

2. *Déterminer les réels* a *et* b *de manière à ce que la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *de la manière suivante soit dérivable sur* $]0, +\infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si\ 0 \le x \le 1 \\ ax^2 + b & si\ x > 1 \end{cases}$$

Exercice 3. ***Valeur Absolue.***
Etudier la dérivabilité et l'existence de la droite tangente en $x = 0$ *des fonctions* f_1 *et* f_2 *:*

$$f_1(x) = |x| \text{ et } f_2(x) = x|x|$$

Exercice 4. ***Étude d'une fonction puissance***

1. *Déterminer le domaine de définition* D *de la fonction* f *donnée par* $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ *et déterminer les limites de* f *aux bornes de* D.
2. *Tracer le tableau de variation de* f *et donner le signe de* f *sur* D.
3. *Déterminer le domaine de définition de* $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x}}$.
4. *Calculer la dérivée de* h *et donner son tableau de variation avec les limites aux bornes de son domaine de définition.*

Exercice 5. ***Calcul de dérivées***
Dériver les fonctions suivantes (on précisera le domaine de définition et un ensemble sur lequel elle est dérivable) ainsi que les zeros de la fonction dérivée :

1. $f_1(x) = \frac{x-1}{x+2}$,
2. $f_2(x) = \frac{x}{x^2-1}$
3. $f_3(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 1}$
4. $f_4(x) = (4x^3 - 3x^2 - 6x + 11)^{-4}$
5. $f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$,
6. $f_6(x) = \ln(1 + x^6)$
7. $f_7(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
8. $f_8(x) = (1 + \ln x)^{3/2}$
9. $f_9(x) = \sqrt{e^x + 1}$

10. $f_{10}(x) = (2+3x)^{\sqrt{x}}$

Exercice 6. ***Asymptotes obliques***
Déterminer l'équation des asymptotes à l'infini quand elles existent

$$a)\ f(x) = \frac{-3x+4}{2x+3} \quad b) f(x) = \frac{x(2x-3)^2}{(x-2)^2} \quad c)\ f(x) = \frac{2x^2+x\sqrt{x}}{x+3}$$

Exercice 7. ***Dérivées successives.***
Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction dérivable à tout ordre et* g,h,i *les fonctions définies par* $g(x) = f(x^2)$, $h(x) = f(\frac{1}{x})$ *et* $i(x) = exp(f(x))$ *Calculer* $g', g'', g''', h', h'', h''', i', i'', i'''$ *en fonction de* f', f'', f'''.

Exercice 8. *Soit* $(a+ib)$ *une racine n-ième de l'unité et* $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$. *Donner une formule simple de la n-ième dérivée* $f^{(n)}$.

Exercice 9.
Proposition : Pour toute fonction f, *n-fois dérivables sur un intervalle* $[a,b]$, *il existe une fonction* h *sur* $[a,b]$ *telle que* $\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$ *et pour tout* $x, x_0 \in [a,b]$ *on a :*

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n h(x).$$

1. *Appliquer la formule à la fonction* f_1 *donnée par* $f_1(x) = e^x$ *en* $x_0 = 0$
2. *Appliquer la formule à la fonction* f_2 *donnée par* $f_2(x) = (\sin x)^3$ *en* $x_0 = 0$.
3. *En déduire*
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x^2/2}{(\sin x)^3}.$$

Exercice 10. ***Fonction réciproque trigonométrique***

1. *Donner le domaine de définition et l'ensemble image de la fonction*
$$x \to \arcsin x$$
2. *Donner les valeurs de* $\arcsin(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right))$ *et* $\arcsin(\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right))$.
3. *Les valeurs de*
$$\tan(\arctan(1/2)) \text{ et } \sin(\arcsin\frac{1}{3}).$$
4. *En exprimant* $\cos^2(x)$ *en fonction de* $\tan^2(x)$, *montrer que*
$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 11. ***Etude de fonction Réciproque***
Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\begin{cases} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1. *La fonction* f *est-elle continue en* $x = 0$ *?*
2. *Calculer la dérivée à droite et à gauche en* $x = 0$ *? La fonction* f *est-elle dérivable en* $x = 0$ *?*

3. *En utilisant un changement de variable, calculer* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
4. *On considère la fonction* $g(x) = \frac{x}{x^2+1} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. *Tracer le tableau de variation de la fonction* $g(x)$ *et déterminer son signe sur* $]0, +\infty[$.
5. *Déterminer la dérivée* $f'(x)$ *et déterminer son signe sur* $]0, +\infty[$. *Tracer le tableau de variation de* $f(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.
6. *Tracer la fonction* $f(x)$.