Chapitre 3

Calculs de limites

Le chapitre suivant concerne les limites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$. En se rappelant qu'une suite est une application définie sur $\mathbb{N}$, il est clair que les résultats sur les limites de fonctions peuvent également s'appliquer au calcul de la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

I. Limites de sommes, de produits et de quotients de fonctions

Lorsque l'on connaît les limites de deux fonctions f et g, on peut parfois en déduire la limite de $f+g$, de $f\times g$ et de $\dfrac{f}{g}$. On utilise les tableaux suivant :

Proposition 3.1

Soient f et g deux fonctions et l et l' deux nombres réels.

Limite de f	Limite de g	Limite de $f+g$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	FI*
$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite de f	Limite de g	Limite de $f \times g$
l	l'	$l \times l'$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$l \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	FI

Limite de f	Limite de g	Limite de $\frac{f}{g}$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$\pm\infty$	0
0	$l \neq 0$	0
$\pm\infty$	$l \neq 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI
0	0	FI

*FI signifie « Forme Indéterminée » : les règles de sommes, de produits et de quotients ne permettent pas de conclure. Il faut donc utiliser d'autres propriétés pour déterminer la limite.

Exemple 1.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+3x\right) = +\infty$.

II. Les sept méthodes à connaître pour lever une indéterminée

---

1. Factoriser par le terme dominant

Proposition 3.2

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ (où P et Q sont des polynômes) en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite du quotient des termes de plus haut degré de P et Q

Remarque. *Attention, cette règle ne s'applique que lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Lorsqu'on s'intéresse par exemple à une limite en 0, le terme dominant est en fait le terme de plus petite puissance. Pour cette raison, et pour éviter les erreurs, on fera apparaître le détail de la factorisation comme dans les exemples suivants.*

Exemple 2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^6+7x^4-17x+4}{x^6+1}$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{-3x^6+7x^4-17x+4}{x^6+1} = \frac{x^6\left(-3+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^5}+\frac{4}{x^6}\right)}{x^6\left(1+\frac{1}{x^6}\right)} = \frac{-3+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^5}+\frac{4}{x^6}}{1+\frac{1}{x^6}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -3$$

Exemple 3. *Calculer* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+3x}{x^6+2x}$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{x^2+3x}{x^6+2x} = \frac{x(3+x)}{x(2+x^5)} = \frac{3+x}{2+x^5} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$$

2. Utiliser un changement de variables

Exemple 4. *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2-5}$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = x^2-5$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, y tend vers $+\infty$.
Ainsi, $e^{x^2-5} = e^y \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque. *Effectuer un changement de variables est revient en fait à utiliser les résultats sur la limite des fonctions composées (Dans l'exemple, on a composé la fonction $x \longrightarrow x^2-5$ avec la fonction exponentielle).*

3. Utiliser un encadrement

Théorème 3.3 – gendarmes

Soient f, g, h trois fonctions et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Supposons que pour x proche de x_0, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$.
Alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.

Exemple 5. *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$.

Solution : Pour tout $x > 0$:
$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
Donc $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\cos(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
Comme $\dfrac{1}{x}$ et $-\dfrac{1}{x}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$

4. Multiplier par la quantité conjuguée lorsqu'il y a des racines

Exemple 6. *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+2}$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{x^2+8} + \sqrt{x^2+2}\right)}{\sqrt{x^2+8} + \sqrt{x^2+2}} = \frac{6}{\sqrt{x^2+8} + \sqrt{x^2+2}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. Utiliser un nombre dérivé

Remarque. *Si f est dérivable en a, par définition du nombre dérivé $f'(a)$,*
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$*, ou de manière équivalente :* $\lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(a)$.

Exemple 7. *Calculer* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Solution : On note f la fonction exponentielle. Pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f'(0) = e^0 = 1.$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$).

6. Utiliser les résultats de croissance comparée

Proposition 3.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{kx}}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^{kx} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^k}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n(\ln(x))^k = 0$

Exemple 8. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-1}{e^{2x}x^2+12x}$
Solution : Pour tout $x > 0$,
On pose $y = 2x$. *Lorsque* x *tend vers* $+\infty$, y *tend vers* $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^4-1}{e^{2x}x^2+12x} &= \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^4-1}{e^y\left(\frac{y}{2}\right)^2+12\frac{y}{2}} \\
&= \frac{y^4}{e^y y^2} \times \frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{y^4}}{\frac{1}{4}+\frac{6}{y}} \\
&= \frac{y^2}{e^y} \times \frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{y^4}}{\frac{1}{4}+\frac{6}{y}}
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\frac{1}{16}-\frac{1}{y^4}}{\frac{1}{4}+\frac{6}{y}} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$

et, par croissance comparée, $\dfrac{y^2}{e^y} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-1}{e^{2x}x^2+12x} = 0$.

7. Règle de l'Hôpital

Proposition 3.5

Soit $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $a \in \mathrm{I}$. Soient deux fonctions f et g définies sur I et telles que $\lim_a f = \lim_a g = 0$ et $g'(a) \neq 0$. Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Remarque. *On peut remplacer l'hypothèse* $\lim_a f = \lim_a g = 0$ *par* $\lim_a f = \lim_a g = +\infty$ *et le résultat reste vrai.*

Remarque. *La règle reste également vraie pour des limites en* $+\infty$ *ou en* $-\infty$ *à condition, là aussi que la limite de* $g'(x)$ *ne soit pas* 0.

Exemple 9. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$.

Solution : Pour tout $x > 0$*, on pose* $f(x) = \sqrt{x}$ *et* $g(x) = \ln(x)$.
On est bien dans le cadre des hypothèses de la règle de l'Hopital.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2} = +\infty.$

Remarque. *Les hypothèses de la règle de l'Hopital sont précises. En particulier, il faut bien vérifier que* g' *ne s'annule pas au voisinage de la limite calculée.*
Cette règle étant souvent source d'erreur, on veillera à ne l'utiliser qu'en dernier recours. Par exemple, pour déterminer la limite d'une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes), on n'utilisera pas la règle de l'Hopital mais on factorisera les polynômes afin de simplifier la fraction et lever ainsi l'indéterminée.

Exercices

Exercice 1. ***Méthodes algébriques***

1. *Calculer les limites suivantes.* $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x^2+x-6}{x+2}$ *et* $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^4-x-1}{(x-1)^3}$.
2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x}$*, puis* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$*,]*

Exercice 2. ***Encadrement***
Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}(\cos(1+1/x)-1), \qquad \lim_{x\to+\infty} \sin(e^x)\sin(e^{-x}).$$

Exercice 3. ***Croissances comparées***

1. *Grâce aux changements de variables indiqué, déduire successivement les limites suivantes en utilisant le fait que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)/x^2 = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad (x = y^2), \qquad \lim_{x\to0} x\ln(x) = 0 \quad (x = 1/y).$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (y = e^x), \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad (y = -x).$$

2. *Montrer plus généralement que pour tous* $a, b > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^a}{x^b} = 0, \qquad \lim_{x\to0} x^a|\ln(x)|^b = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$$

3. ***Application*** *: Calculer les limites suivantes.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^e}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \ln(|x|)e^x, \qquad \lim_{x\to0} x^x.$$

Exercice 4. ***Facteur dominant***
Déterminer le facteur dominant des numérateurs et dénominateurs des fractions rationnelles suivantes, puis calculer les limites.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1+e^{3x}}{x+2x^2+e^x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1+(\ln x)^4}{1+x+x^2+x^3+(\ln x)^5},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)^2(x-3)(x^2+2)}{(3x+1)^3\sqrt{x^2+1}(2x-1)}.$$

Exercice 5. ***Calcul des dérivées***
En utilisant le calcul des dérivées que l'on admettra, calculer si possible les limites suivantes :

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1},\qquad \lim_{x\to\pi/4}\frac{\tan(x)-1}{x-\pi/4},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.$$

Exercice 6. ***Règle de l'Hôpital***
En utilisant le calcul des dérivées, calculer les limites suivantes quand c'est possible :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\ln(1+2x)},\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{\sin x},$$

Exercice 7. ***Valeurs absolues***
Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to-2}\frac{|x^2+x-3|-|3x^2+4x+1|}{|2x+1|-|x+5|},\qquad \lim_{x\to+\infty}|x^3+e^x-e^{-x}|-|x^3-e^x-3x|.$$

Exercice 8. ***Puissances généralisées***
Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty}(2^x+3^x)^{\frac{1}{x}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice 9. ***Un calcul trigonométrique***

1. *Exprimer* $\cos(2t)$ *en fonction de* $\sin(t)$.
2. *Utiliser le calcul ci dessus pour calculer*

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x}\quad\textit{et}\quad\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

Exercice 10. ***Limites non existantes***
Justifier que les limites suivantes n'existent pas.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{x+2}\qquad \lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}\qquad \lim_{x\to+\infty}\cos(x).$$

Entraînement

Exercice 11. *Calculer les limites suivantes,* ***en expliquant précisément la méthode employée****.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+(\ln x)^3}{x^4e^{-x}+x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x+1)-\ln(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+(\ln x)^3}{x^4e^{-x}+x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2x+3x^2+4x^3+(\ln(x+1))^4}{(x^3-\sqrt{x}\ln x)}$

5. $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+\ln(x)}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1+(\ln x)^4}{1+x^2+x^3+(\ln x)^5}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\left(\cos\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1\right)$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\sin(1/x)$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\ln(1+2x)}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{x^3-1}{x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1+e^{3x}}{x+2x^2+e^x}$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$