

Chapitre 2

Études de fonctions

I. Généralités

1. Définition, parité et périodicité

Définition 2.1

Soit X et Y deux ensembles. Une fonction (ou une application) de X dans Y associe à chaque élément $x \in X$ un unique élément $y \in Y$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } y = f(x)\}.$$

Remarque. Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction, on utilise le fait que :

- $\frac{1}{x}$ n'a de sens que si $x \neq 0$
- $\sqrt{x}$ n'a de sens que si $x \geq 0$
- $\ln(x)$ n'a de sens que si $x > 0$.

Exemple 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-1}$.

Solution :

$f(x)$ est bien défini si

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ \sqrt{x+2} \neq 1 \end{cases}$$

Cela signifie que $x \in]-2; -1[\cup]-1; +\infty[$.

Pour réduire le domaine d'étude, on utilise la parité et la périodicité des fonctions.

Définition 2.2

Soit $D \subset \mathbb{R}$. On dit que D est centré en 0 si pour tout $x \in D$, on a $-x \in D$.

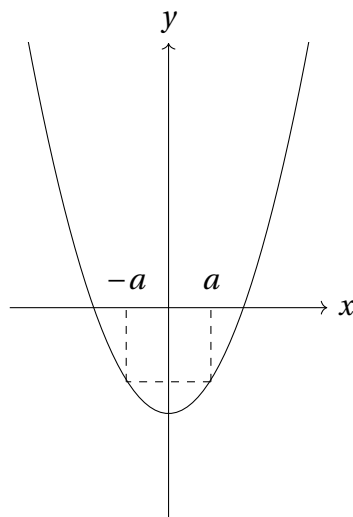
Définition 2.3

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

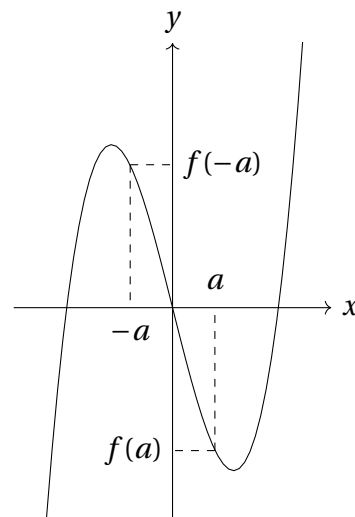
- f est paire si D est centré en 0 et si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
- f est impaire si D est centré en 0 et si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Proposition 2.1

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Si f est impaire, $f(0) = 0$.



Fonction paire



Fonction impaire

Définition 2.4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est T -périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

2. Variations et extrema**Définition 2.5**

Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est croissante sur D si pour tout $a, b \in D$, $a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$.
- On dit que f est décroissante sur D si pour tout $a, b \in D$, $a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$.
- On dit que f est monotone sur D si f est croissante ou décroissante sur D .

Exemple 2. Il existe des fonctions qui ne sont pas monotones sur leur ensemble de définition. Par exemple, la fonction carrée est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}$. On peut dire qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque (Sens de variation des fonctions et dérivée).

- Si f' est (strictement) positive sur un intervalle I , alors f est (strictement) croissante sur I .
- si f est croissante sur I alors f' est positive. Cependant, si f est strictement croissante sur I , on n'a pas nécessairement f' strictement positive. Exemple : fonction cube.
- Si $f' > 0$ sur I sauf peut-être un nombre fini de fois où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si D n'est pas un intervalle et si f' sur D , alors f n'est pas nécessairement croissante sur D . Exemple : fonction inverse.

Remarque. Attention, il n'est pas toujours possible de découper l'ensemble de définition en sous-intervalles sur lequel f est monotone. On pourra par exemple considérer la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Remarque (Extremum (local) d'une fonction).

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert. Si f admet un extremum (local) en $a \in I$, alors $f'(a) = 0$.
- Le résultat est faux si I n'est pas un intervalle ouvert.
- La réciproque est fausse. Exemple : fonction cube

Fonction	$\mathcal{D}_f$	$f(x) =$	dériv. sur	$f'(x) =$	parité	période
affine	$\mathbb{R}$	$ax + b$	$\mathbb{R}$	a		
monômes	$\mathbb{R}$	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	selon n	
inverse	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	impaire	
racine carrée	$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		
valeur absolue	$\mathbb{R}$	$ x $	$\mathbb{R}^*$	1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$	paire	
cosinus	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	paire	2π
sinus	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	impaire	2π
tangente	$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$	$\tan(x)$ $= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\mathcal{D}_f$	$1 + \tan^2(x)$ $= \frac{1}{\cos^2(x)}$	impaire	π
exp	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x		
log népérien	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$		

Proposition 2.2

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée
Dérivée d'une somme de fonctions	$u + v$	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée du produit d'une fonction u par une constante λ	$\lambda \times u$	$(\lambda \times u)' = \lambda \times u'$
Dérivée d'un produit de fonctions	$u \times v$	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée d'un quotient de fonctions	$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de l'inverse d'une fonction	$\frac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

II. Fonctions polynomiales

1. Définition de l'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.6

Une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}$ est une fonction $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$ et tels que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

L'entier n est appelé degré de P et noté $\deg(P)$.

Remarque. Dans ce cours, on parlera indifféremment de « polynôme » ou de « fonction polynomiale ».

Remarque. Si P est un polynôme sur $\mathbb{R}$ alors on peut le considérer comme un polynôme sur $\mathbb{C}$ car les coefficients a_k appartiennent à $\mathbb{C}$. La réciproque est en revanche fausse.

Définition 2.7

- L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.
- L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque. D'après la remarque précédente, on a $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Exemple 3.

- Si $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par $P(x) = x^4 - 5x + 1$, on a $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $P \in \mathbb{R}_5[X]$ mais $P \notin \mathbb{R}_3[X]$.
- Si $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est la fonction définie par $P(x) = x^3 - ix^2 + 3i$, on a $P \in \mathbb{C}[X]$ mais $P \notin \mathbb{R}[X]$.

2. Relation de divisibilité entre polynômes**Définition 2.8**

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P **divise** Q dans $\mathbb{K}[X]$ lorsqu'il existe $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PS$. On dit aussi que P est un **diviseur** de Q et que Q est un **multiple** de P . On note $P|Q$.

Exemple 4. Si $P(x) = x - 1$ et $Q(x) = x^2 - 1$ alors P divise Q car, pour tout x , $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Proposition 2.3

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$.
Si $P|Q$ et $Q|R$, alors $P|R$.

Proposition 2.4

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P|Q$ et $P|R$.

- Pour tous $m, n \in \mathbb{K}$, $P|(mQ + nR)$.
- En particulier, $P|(Q + R)$ et $P|(Q - R)$.

Remarque. Les preuves des propositions ci-dessus sont similaires aux propositions d'arithmétiques dans $\mathbb{Z}$.

3. Division euclidienne de polynômes**Proposition 2.5 – (admise)**

Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \text{et} \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Remarque. La condition $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ signifie que B n'est pas le polynôme nul.

Exemple 5. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x + 3$ et $B(x) = x$
2. $A(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x + 3$ et $B(x) = x^2$
3. $A(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x + 3$ et $B(x) = x^2 + x + 1$

Solution :

1. $A(x) = x(x^3 + 3x^2 + x - 5) + 3$.
Ainsi $Q(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$ et $R(x) = 3$ (avec $\deg(R) < \deg(B)$).
2. $A(x) = x^2(x^2 + 3x + 1) - 5x + 3$.
Ainsi $Q(x) = x^2 + 3x + 1$ et $R(x) = -5x + 3$ (avec $\deg(R) < \deg(B)$).
3. On pose la division euclidienne comme ci-dessous, en ordonnant les polynômes selon les puissances décroissantes de x .

$x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x + 3$ $- \quad x^4 + x^3 + x^2$	$x^2 + x + 1$ $x^2 + 2x - 2$
$2x^3 - 5x + 3$ $- \quad 2x^3 + 2x^2 + 2x$	
$-2x^2 - 7x + 3$ $- \quad -2x^2 - 2x - 2$	
$-5x + 5$	

Ainsi, on a $A(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x - 2) + (-5x + 5)$.

Par conséquent, $Q(x) = x^2 + 2x - 2$ et $R(x) = -5x + 5$ (avec $\deg(R) < \deg(B)$).

4. Application à l'étude des racines

Définition 2.9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $a \in \mathbb{C}$ est une racine de P si $P(a) = 0$.

Remarque. Même si $P \in \mathbb{R}[X]$, P peut admettre des racines complexes non réelles. C'est par exemple le cas de polynômes du second degré lorsque $\Delta < 0$.

Proposition 2.6

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si a une racine de P alors $\bar{a}$ est aussi une racine de P .

Démonstration.

$P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

On va montrer que $\bar{a}$ est une racine.

$$P(\bar{a}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{a}^k = \sum_{k=0}^n a_k \overline{a^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k a^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k a^k} = \overline{P(a)} = 0 \quad (\text{car } a \text{ est une racine de } P)$$

□

Remarque. La condition $P \in \mathbb{R}[X]$ est essentielle. La Proposition devient fausse si $P \in \mathbb{C}[X]$. Il suffit de considérer par exemple le polynôme $P(X) = (X - i)(X - 1)$.

Proposition 2.7 – Théorème de D'Alembert-Gauss (admis)

Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant admet au moins une racine complexe.

Histoire – Théorème de d'Alembert-Gauss

Au XVIII^e siècle, l'existence de racines complexes était globalement admise mais cela n'a été démontrée rigoureusement qu'au début du XIX^e siècle. Ce théorème est également connu sous le nom de « théorème fondamental de l'algèbre ». Il s'agit là d'une situation que l'on peut aujourd'hui estimer paradoxale car toutes les démonstrations connues utilisent des arguments analytiques (d'analyse complexe par exemple). Cependant, le paradoxe n'est qu'apparent car le nom de « théorème fondamental de l'algèbre » est apparu à une époque où l'algèbre désignait la théorie des équations. De nos jours, ce terme désigne plutôt la discipline qui s'intéresse aux structures et aux opérations sur les ensembles.

Proposition 2.8

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P(a) = 0 \iff \text{Il existe } Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{K}, P(x) = (x - a)Q(x)$$

Démonstration.

- $\Leftarrow$ Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = (x - a)Q(x)$. Alors, $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$.
- $\Rightarrow$ Réciproquement, supposons que $P(a) = 0$. On effectue la division euclidienne de P par $x - a$. Ainsi, il existe des polynômes Q et R tels que

$$\begin{cases} P(x) = (x - a)Q(x) + R(x) \quad (\star) \\ \text{et} \\ \deg(R) < 1 \end{cases}$$

Par conséquent, R est un polynôme constant. On note c cette constante. En évaluant l'égalité $(\star)$ pour $x = a$, on obtient

$$\begin{aligned} P(a) &= (a - a)Q(a) + c \\ \iff 0 &= 0 + c \\ \iff 0 &= c \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $R(x) = 0$ et donc $P(x) = (x - a)Q(x)$.

□

Exemple 6. On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 1$.

Montrer que $(x - 1)$ divise P puis établir la factorisation de P par $x - 1$.

Solution :

$P(1) = 1^3 - 1 = 0$. Ainsi, 1 est une racine de P donc $x - 1$ divise P .

On effectue la division euclidienne de P par $x - 1$ et on trouve :

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Proposition 2.9

Pour tout $n \geq 1$, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n , P admet au plus n racines.

Démonstration.

On démontre par récurrence que la propriété $\mathcal{H}(n)$: « Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n , P admet au plus n racines » est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

- Initialisation : Si P est un polynôme de degré 1, $P(x) = ax + b$ (avec $a \neq 0$).
Par conséquent, $-\frac{b}{a}$ est l'unique racine de P et donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \geq 1$. Montrons qu'alors $\mathcal{H}(n + 1)$ est vraie.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n + 1$. On va montrer que P admet au plus $n + 1$ racines.
En fait, on peut supposer que P admet une racine (car sinon il n'y a alors rien à démontrer). On note a cette racine.
D'après la Proposition 7, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$.
En utilisant la règle du produit nul, on voit que l'ensemble des racines de P est constitué de l'ensemble des racines de Q auquel on ajoute a .
On a de plus $\deg(Q) = n$ et donc, d'après $\mathcal{H}(n)$, Q admet au plus n racines.
Finalement, on en déduit que P admet au plus $n + 1$ racines et donc que $\mathcal{H}(n + 1)$ est vraie.

□

5. Factorisation de polynômes

a. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Proposition 2.10

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Il existe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que pour tout x ,

$$P(x) = a \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

Remarque.

- a est le coefficient dominant de P .
- Les nombres x_k ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.
- On peut aussi utiliser ce résultat si $P \in \mathbb{R}[X]$ car $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Démonstration.

On démontre par récurrence que la propriété $\mathcal{H}(n)$: « Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n , il existe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que pour tout x , $P(x) = a \prod_{k=1}^n (x - x_k)$ » est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

- Initialisation : Si P est un polynôme de degré 1, $P(x) = ax + b$ (avec $a \neq 0$).
En posant $x_1 = -\frac{b}{a}$, on a $P(x) = a(x - x_1)$ et donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \geq 1$.
Montrons qu'alors $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$.
D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, P admet une racine complexe (on la note x_{n+1}). De plus, d'après la Proposition 7, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(x) = (x - x_{n+1})Q(x)$.
D'après l'hypothèse de récurrence, comme $\deg(Q) = n$, il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que $Q(x) = a \prod_{k=1}^n (x - x_k)$.
Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - x_{n+1})Q(x) \\ &= (x - x_{n+1}) \times a \prod_{k=1}^n (x - x_k) \\ &= a \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k) \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. □

Corollaire 2.11

Pour tout $n \geq 1$, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n , P admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité.

b. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 2.12

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe $x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{R}$, il existe $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_l, t_l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x , $P(x) = a \prod_{k=1}^r (x - x_k) \times \prod_{k=1}^l (x^2 + s_k x + t_k)$ où les polynômes $x^2 + s_k x + t_k$ sont sans racines réelles, c'est-à-dire que $s_k^2 - 4t_k < 0$.

Démonstration.

On sait, d'après la Proposition 10 qu'il existe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x) = a \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

Quitte à permuter les x_i , on peut supposer que $x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{R}$ et que $x_{r+1}, \dots, x_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Par conséquent, on a $P(x) = a \prod_{k=1}^r (x - x_k) \times Q(x)$ où Q admet pour racines $x_{r+1}, \dots, x_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et, *a priori*, $Q \in \mathbb{C}[X]$.

En fait, comme les polynômes $a \prod_{k=1}^r (x - x_k)$ et $P(x)$ sont à coefficients réels, il en est de

même pour $Q(x)$ (cela découle directement de l'unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$).

Par ailleurs, d'après la Proposition 5, comme x_{r+1} est une racine de Q , $\overline{x_{r+1}}$ est également une racine de Q . Sachant que $x_{r+1} \neq \overline{x_{r+1}}$, Q est donc divisible par $(x - x_{r+1})(x - \overline{x_{r+1}})$. Or,

$$\begin{aligned}(x - x_{r+1})(x - \overline{x_{r+1}}) &= x^2 - (x_{r+1} + \overline{x_{r+1}})x + x_{r+1}\overline{x_{r+1}} \\ &= x^2 - 2\operatorname{Re}(x_{r+1})x + (\operatorname{Re}(x_{r+1}))^2 + (\operatorname{Im}(x_{r+1}))^2\end{aligned}$$

Cela prouve donc que $(x - x_{r+1})(x - \overline{x_{r+1}})$ est un polynôme à coefficient réel. Il existe donc des réels s_1 et t_1 tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x - x_{r+1})(x - \overline{x_{r+1}}) = x^2 + s_1x + t_1$.

Ainsi, il existe $Q' \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = (x^2 + s_1x + t_1)Q'(x)$ et les racines de Q' sont les racines de Q auxquelles on a enlevé x_{r+1} et $\overline{x_{r+1}}$.

En répétant le procédé avec Q' , on voit que l'on pourra factoriser Q en produit de polynômes réels du second degré.

Finalement, on obtiendra une factorisation de P de la forme suivante :

$$P(x) = a \prod_{k=1}^r (x - x_k) \times \prod_{k=1}^l (x^2 + s_kx + t_k)$$

□

Exemple 7.

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(x) = x^4 - 1$.

Solution :

P admet les quatre racines suivantes : $1, -1, i, -i$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$ (factorisation dans $\mathbb{C}[X]$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ (factorisation dans $\mathbb{R}[X]$).

Exercices

Fonctions trigonométriques

Exercice 1. On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et on note Γ sa courbe représentative dans le plan.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Étudier ensuite la périodicité et la parité de f .
2. Déterminer la dérivée de f sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ puis donner son tableau de variation.
3. Tracer Γ .

Remarque : la fonction f est, par définition, la fonction tangente.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$. On note Γ sa courbe représentative dans le plan.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Étudier ensuite la périodicité et la parité de f .
2. Calculer sa dérivée et établir son tableau de variation.
3. Construire Γ .

Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $P = -x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ admette 2 et -3 comme racines.

Fonctions polynomiales

Exercice 3. Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $P = -x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ admette 2 et -3 comme racines.

Exercice 4. 1. Déterminer Q_1, Q_2 tels que

$$z - z_0^2 = (z - z_0)Q_1(z) \quad \text{et} \quad z^3 - z_0^3 = (z - z_0)Q_2(z).$$

2. Si $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ et si $P(z_0) = 0$, déterminer Q_3 en fonction de z_0, a, b, c et d tel que

$$P(z) = (z - z_0)Q_3(z).$$

Exercice 5. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4 - x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^4 - x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}$
2. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 4}{(x - 3)(x + 1)}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 4}{(x - 3)(x + 1)}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6}{(x - 1)^3}$

Fonctions logarithmes

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln(2) = 0$
2. $\ln(x + 2) - \ln(x + 1) = \ln(x - 1)$

Exercice 7. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x - \ln(1 + x)$ et $g(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$.

1. Étudier ces fonctions sur $[0; +\infty[$ et donner leur tableau de variation.
2. En déduire l'inégalité suivante pour $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

Exercice 8. On considère la fonction définie par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Étudier les variations de f .
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$.

Fonctions par morceaux et valeur absolue

Exercice 9. 1. Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto |x + 2|$ et celle de la fonction $x \mapsto |2x - 5|$.

Déterminer le domaine de définition de f_1 définie par

$$f_1(x) = \ln(|x + 2| - |2x - 5|).$$

Exprimer ensuite $f_1(x)$ par morceaux sans utiliser le symbole « valeur absolue ».

2. Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto |x - 3|$ et celle de la fonction $x \mapsto |x - 5|$.

Déterminer ensuite le domaine de définition de f_2 définie par

$$f_2(x) = \frac{1}{|x - 3| - |x - 5|}.$$

Exprimer ensuite $f_2(x)$ par morceaux sans utiliser le symbole « valeur absolue ».

3. Déterminer le domaine de définition de f_3 définie par

$$f_3(x) = \sqrt{7 - |x - 1|}$$

puis exprimer $f_3(x)$ par morceaux.

4. Déterminer le domaine de définition de f_4 définie par

$$f_4(x) = \sqrt{|x + 1| - 7}$$

puis exprimer $f_4(x)$ par morceaux.

5. Déterminer le domaine de définition de f_5 définie par

$$f_5(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{7 - x} - (x + 5)}.$$

Limites usuelles

Exercice 10. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x}.$$

Exercice 11. Pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit $a^b = e^{b \ln(a)}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^a$ en discutant selon a .

2. Soit $a > 0$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x$ en discutant selon a .

3. Que vaut $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2} - 1)^x$?