# Calculus
# Licence 1

Yannick VINCENT
Université Gustave Eiffel

# *Table des matières*

# *Chapitre 1*

# *Nombres complexes*

## Introduction

**Histoire – Équations du troisième degré**

Les nombres complexes ont été introduit au XVIe siècle pour résoudre des équations de degré trois. Les mathématiciens ayant travaillé sur le sujet sont notamment **Scipione del Ferro** (1465-1526), **Anton Maria del Fiore**, **Girolamo Cardano** (1501-1576), **Niccolò Tartaglia** (1500-1557), **Ludovico Ferrari** (1522-1565) et **Rafael Bombelli** (1526-1573). En particulier, l'idée est apparue d'effectuer un changement de variables afin de se rammener à une équation de degré 2.

### Résolution de $x^3 - 3x^2 - 15x - 18 = 0$ (E)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ donc :

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 15x - 18 = 0 &\iff (x-1)^3 - 3x + 1 - 15x - 18 = 0 \\ &\iff (x-1)^3 - 18x - 17 = 0. \end{aligned}$$

On pose $y = x - 1$. L'équation (E) devient :

$$y^3 - 18(y+1) - 17 = 0$$

c'est-à-dire

$$y^3 - 18y - 35 = 0$$

Cardano a eu l'idée de chercher une solution de (E′) sous la forme $y = u + v$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E') &\iff (u+v)^3 - 18(u+v) - 35 = 0\\
&\iff u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 18(u+v) - 35 = 0\\
&\iff u^3 + v^3 - 35 + (u+v)(3uv - 18) = 0\\
&\Longleftarrow \begin{cases} u^3 + v^3 - 35 = 0\\ 3uv - 18 = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} u^3 + v^3 = 35\\ u^3v^3 = 6^3 = 216\end{cases}
\end{aligned}$$

$u^3$ et $v^3$ sont les solutions de l'équation de degré deux :

$$X^2 - 35X + 216 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont 8 et 27 donc $u^3 = 8 = 2^3$ et $v^3 = 27 = 3^3$ (ou inversement) et donc $u = 2$ et $v = 3$ conviennent.
Ainsi, $y = u + v = 5$ est solution de (E′) donc $x = y + 1 = 6$ est solution de (E).
Sachant que 6 est une solution de (E), on peut factoriser l'équation (E) par $(x - 6)$ :
On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^3 - 3x^2 - 15x - 18 = (x-6)(ax^2 + bx + c).$$

En développant et en identifiant les coefficients, on obtient $a = 1$, $b = 3$ et $c = 3$.
Ainsi, (E) $\iff (x-6)(x^2+3x+3) = 0$
Le polynôme $x^2 + 3x + 3$ a un discriminant strictement négatif ($\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3$) et n'a donc aucune racine réelle.
Finalement, on en déduit que (E) admet une seule solution réelle, à savoir 6.

## Résolution de $x^3 - 15x - 4 = 0$ (F)

On pose $x = u + v$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution de } (F) &\iff (u+v)^3 - 15(u+v) - 4 = 0\\
&\iff u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 15(u+v) - 4 = 0\\
&\iff u^3 + v^3 - 4 + (u+v)(3uv - 15) = 0\\
&\Longleftarrow \begin{cases} u^3 + v^3 - 4 = 0\\ 3uv - 15 = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} u^3 + v^3 = 4\\ u^3v^3 = 5^3 = 125\end{cases}
\end{aligned}$$

$u^3$ et $v^3$ sont donc solutions de $X^2 - 4X + 125 = 0$.
Or, $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 125 = -484$ donc l'équation de degré 2 n'a pas de solution.
Pourtant, pour $x = -10$, $x^3 - 15x - 4 < 0$ et pour $x = 10$, $x^3 - 15x - 4 > 0$, c'est donc que l'équation (F) admet au moins une solution réelle.

Les mathématiciens de la Renaissance, en particulier Rafael Bombelli, décident de continuer malgré tout en utilisant la même méthode que précédemment et en s'autorisant à écrire la racine d'un nombre négatif :

$$\begin{aligned} X^2-4X+125 &= (X-2)^2-4+125 \\ &= (X-2)^2+11^2 \\ &= (X-2)^2-(11\sqrt{-1})^2 \\ &= (X-2-11\sqrt{-1})(X-2+11\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

On a donc $u^3 = 2+11\sqrt{-1}$ et $v^3 = 2-11\sqrt{-1}$.
Ainsi,

$$u = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$$

Or, par ailleurs :

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{-1})^3 &= 2^3+3\times2^2\times\sqrt{-1}+3\times2\times(\sqrt{-1})^2+(\sqrt{-1})^3 \\ &= 8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1} \\ &= 2+11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $2+\sqrt{-1} = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$ et par suite, $u = 2+\sqrt{-1}$.
De la même manière, on montre que $v = 2-\sqrt{-1}$.

Finalement,

$$x = u+v = \left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right) = 4.$$

On vérifie un peu sceptique et on se rend compte que 4 est bien solution de (F) !

Comme 4 est une solution de (F), on peut factoriser par $(x-4)$ :

$$(F) \Longleftrightarrow (x-4)(x^2+4x+1) = 0$$

Comme l'équation $x^2+4x+1=0$ a pour solution $-2+\sqrt{3}$ et $-2-\sqrt{3}$,
l'ensemble des solutions de (F) est :

$$\mathscr{S} = \left\{4\,;-2-\sqrt{3}\,;-2+\sqrt{3}\right\}.$$

# I. Définition et propriétés des nombres complexes

## 1. Définition d'un nombre complexe

**Définition 1.1**

- Il existe un nombre $i$ tel que $i^2 = -1$
- Un **nombre complexe** $z$ est un nombre de la forme $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

**Remarque.**
*On ne note pas $\sqrt{-1}$ pour éviter les confusions. Sinon, on pourrait être tenté d'écrire par exemple :*

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = 1.$$

**Définition 1.2**

- L'écriture d'un nombre complexe $z$ sous la forme $z = a + ib$ est appelée forme algébrique de $z$.
- Le nombre réel $a$ est appelé **partie réelle** de $z$ et on note $a = \mathrm{Re}(z)$.
- Le nombre réel $b$ est appelé **partie imaginaire** de $z$ et on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

**Remarque.**

- *La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel.*
- *Il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$. En particulier, un nombre complexe n'est ni positif ni négatif et écrire $2i > 0$ n'a aucun sens.*

**Exemple 1.**

- $5 + i$ *est un nombre complexe avec* $a = 5$ *et* $b = 1$.
- *Les nombres réels sont des cas particuliers de nombres complexes (avec* $b = 0$*).*

**Définition 1.3**

- Si $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$, $z$ est appelé un **imaginaire pur**
- L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$

**Histoire – Nombres complexes**

La notation $i$ n'a pas été utilisée dès le départ.
En 1777, **Leonhard Euler** décida de l'introduire ($i$ comme imaginaire) et d'écrire $i \times i = -1$ afin d'éviter les ambiguités de la notation $\sqrt{-1}$.
À la fin du XVIIIe siècle, les quantités imaginaires n'étaient pourtant toujours pas réellement acceptées par la communauté mathématique mais seulement tolérées pour leur côté pratique. C'est au XIXe siècle que des mathématiciens comme **Carl Friedrich Gauß** finissent par leur donner une véritable légitimité. Cela passera entre autres par le fait de représenter géométriquement les nombres complexes dans le plan (voir chapitres suivants). Aussi, Gauss adoptera le terme « nombres complexes » pour rompre avec l'idée qu'il s'agit de quantités qui n'existeraient pas comme le suggère le terme « imaginaire ».

## 2. Nombres complexes et opérations

**Définition 1.4**

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$ ($a, b, a', b'$ sont des réels).

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

**Exemple 2.**
*Si* $z = 1 + i$ *et* $z' = 2 - 3i$.
$z + z' = (1 + i) + (2 - 3i) = (1 + 2) + i(1 + (-3)) = 3 - 2i$

**Proposition 1.1**

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$.

- $z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- $z = z' \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$.

**Remarque.**
*Le deuxième point de la Proposition 1.1 signifie que la forme algébrique d'un nombre complexe est unique.*

*Démonstration.*

- Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
  Supposons que $z = 0$.
  On veut montrer qu'alors $a = 0$ et $b = 0$. Supposons par l'absurde que $b \neq 0$.
  Comme $a + ib = 0$, alors $i = -\dfrac{a}{b}$ (car $b \neq 0$).
  Finalement, cela prouve que $i$ est un nombre réel, ce qui est absurde.
  On a donc prouvé que $b = 0$. Par ailleurs, $z = a + ib = a + i \times 0 = a$ donc $a = 0$.
  Réciproquement, si $a = 0$ et $b = 0$, il est immédiat de voir que $z = a + ib = 0$.

- Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $z' = a' + ib'$ avec $a', b' \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
z = z' &\iff a + ib = a + ib' \\
&\iff (a - a') + i(b - b') = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} a - a' = 0 \\ b - b' = 0 \end{array} \right. \text{ d'après le point précédent} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

□

**Méthode – Déterminer un ensemble de complexes vérifiant une condition**

On utilise les propriétés suivantes :

- $z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$.

**Exemple 3.**
*Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $z = x^3 + 2 + i(x - 2)$.*
*Déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles $z$ est un réel. Déterminer $z$ le cas échéant.*

*Solution :*
$z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0 \iff a - 2 = 0 \iff x = 2$.
*Dans ce cas,* $z = 2^3 + 2 + i \times (2 - 2) = 10$.

**Proposition 1.2**

Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.

- $z + z' = z' + z$ **(commutativité de l'addition)**
- $zz' = z'z$ **(commutativité de la multiplication)**
- $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ **(associativité de l'addition)**
- $(zz')z'' = z(z'z'')$ **(associativité de la multiplication)**
- $z + 0 = z$ **(élément neutre de l'addition)**
- $z \times 1 = z$ **(élément neutre de la multiplication)**
- $z(z' + z'') = zz' + zz''$ **(distributivité)**
- Si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$ **(règle du produit nul)**

*Démonstration.*
On écrit $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ et $z'' = a'' + ib''$ avec $a, b, a', b', a'', b'' \in \mathbb{R}$. Les démonstrations découlent de la définition de l'addition et de la multiplication de nombres complexes. On détaille par exemple la démonstration de la règle du produit nul.
Il est clair que si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $zz' = 0$.
Réciproquement, supposons que $zz' = 0$. Cela signifie que $(aa' - bb') + i(ab' + a'b) = 0$.

Par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on en déduit le système d'égalités suivant :

$$\begin{cases} aa' - bb' = 0 \\ ab' + a'b = 0 \end{cases}$$

- Si $a' \neq 0$, on peut également en déduire :

$$\begin{cases} a = \frac{bb'}{a'} \\ \frac{bb'}{a'} \times b' + a'b = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} a = \frac{bb'}{a'} \\ b \times \left(\frac{b'^2}{a'} + a'\right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} a = \frac{bb'}{a'} \\ \frac{b}{a'} \times \left(b'^2 + a'^2\right) = 0 \end{cases}$$

  D'après la seconde égalité, on en déduit que $\frac{b}{a'} = 0$ ou $b'^2 + a'^2$.
  La seconde égalité est impossible donc $\frac{b}{a'} = 0$ donc $b = 0$. En utilisant la première égalité, on voit alors que $a = \frac{bb'}{a'} = 0$. Finalement, on a montré que $a = b = 0$ et donc que $z = 0$.
- Si $a' = 0$. On obtient les équations $bb' = 0$ et $ab' = 0$.
  Ainsi, soit $b' = 0$ et donc $z' = 0$. Dans le cas où $b' = 0$, on aura $a = b = 0$ et donc $z = 0$.
  En conclusion, on a montré que, dans tous les cas, $z = 0$ ou $z' = 0$.

□

**Exemple 4.**
*Si $z = 1 + i$ et $z' = 2 - 3i$.*
$z \times z' = (1+i)(2-3i) = 1 \times 2 + 1 \times (-3i) + i \times 2 + i \times (-3i) = 2 - 3i + 2i + 3 = 5 - i.$

# II. Conjugué d'un nombre complexe

## 1. Définition et propriétés algébriques

**Définition 1.5**

Le conjugué d'un nombre complexe $z$ est le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par :

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z).$$

**Remarque.**
*Les nombres complexes conjugués sont utilisés pour résoudre des équations polynomiales (cf introduction) ou pour calculer l'inverse d'un nombre complexe.*

**Exemple 5.**
*Si $z = 3 + 5i$ alors $\overline{z} = 3 - 5i$.*

**Proposition 1.3**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$.

*Démonstration.*
Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).
$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = \overline{a-(-ib)} = a + ib = z.$ □

**Proposition 1.4**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

1. $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$
2. $z - \overline{z} = 2i\,\text{Im}(z)$

*Démonstration.*
Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

1. $z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\text{Re}(z)$.
2. $z - \overline{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = \text{Im}(z)$.

□

**Proposition 1.5**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

1. $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = z$
2. $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = -z$

*Démonstration.*
Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

1. $\overline{z} = z \Longleftrightarrow \overline{z} - z = 0 \Longleftrightarrow 2i\,\text{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
2. $\overline{z} = -z \Longleftrightarrow \overline{z} + z = 0 \Longleftrightarrow 2\,\text{Re}(z) = 0 \Longleftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

□

**Proposition 1.6**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} \in \mathbb{R}^+$ et :

$$z\overline{z} = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$$

*Démonstration.*
Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).
Alors $z\overline{z} = (\text{Re}(z) + i\text{Im}(z))(\text{Re}(z) - i\text{Im}(z)) = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$. En particulier, $z\overline{z} \in \mathbb{R}^+$. □

**Définition 1.6**

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de $z$ et on note $|z|$ le nombre complexe

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

## 2. Inverse et quotient de nombres complexes

**Proposition 1.7**

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$.
Le nombre $z'$ est appelé l'**inverse** de $z$ et noté $\dfrac{1}{z}$.

*Démonstration.* Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).
Dans le cas où $b = 0$, $z \in \mathbb{R}$ et la propriété est évidente. On peut donc supposer que $b \neq 0$.
Analyse : Supposons qu'il existe $z' = c + id \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$.
Ainsi, $(a + ib)(c + id) = 1$
Donc $(ac - bd) + i(ad + bc) = 1$
Donc $\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$
Donc $\begin{cases} ac - bd = 1 \\ c = -\frac{ad}{b} \quad \text{(car } b \neq 0) \end{cases}$
Donc $\begin{cases} a \times (-\dfrac{ad}{b}) - bd = 1 \\ c = -\frac{ad}{b} \end{cases}$
Donc $\begin{cases} -\frac{d}{b} \times (a^2 + b^2) = 1 \\ c = -\frac{ad}{b} \end{cases}$
Donc $\begin{cases} d = -\frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{(car } a^2 + b^2 \neq 0) \\ c = -\frac{ad}{b} \end{cases}$
Donc $\begin{cases} d = -\frac{b}{a^2+b^2} \\ c = \frac{a}{a^2+b^2} \end{cases}$
Ainsi, $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{ib}{a^2 + b^2}$.
Cela prouve donc que si $z'$ existe, alors il est unique.

Synthèse : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ (avec $(a, b \in \mathbb{R})$.
On pose $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{ib}{a^2 + b^2}$ (ce qui est possible car $a^2 + b^2 \neq 0$).
On a alors $z \times z' = (a + ib)\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{ib}{a^2 + b^2}\right) = \ldots = 1$.
Cela prouve donc l'existence de $z'$. □

**Définition 1.7**

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, le **quotient** de $z$ par $z'$ est le nombre complexe $z \times \dfrac{1}{z'}$.
On le note $\dfrac{z}{z'}$.

**Méthode – Calculer la forme algébrique d'un quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$**

Multiplier le numérateur et le dénominateur par $\overline{z_2}$.

**Exemple 6.**

*Calculer la forme algébrique de* $z = \dfrac{1-i}{3+4i}$

*Solution :*

$z = \dfrac{1-i}{3+4i} = \dfrac{(1-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{3-4i-3i-4}{3^2+4^2} = \dfrac{-1-7i}{25} = -\dfrac{1}{25} - \dfrac{7}{25}i$

## 3. Conjugué et opérations

**Proposition 1.8**

Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
3. Si $z_1 \neq 0$, alors $\overline{\left(\dfrac{1}{z_1}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z_1}}$
4. Si $z_2 \neq 0$ alors $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
5. $\overline{(z^n)} = \left(\overline{z}\right)^n$

*Démonstration.*

1. Soit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. Il suffit alors d'écrire les deux termes de l'égalité en fonction de $a_1, a_2, b_1$ et $b_2$ afin de vérifier l'égalité annoncée.
2. idem
3. Soit $z_1 \in \mathbb{C}^*$. Par définition de l'inverse de $z_1$, $z_1 \times \dfrac{1}{z_1} = 1$.

   Ainsi, $\overline{z_1 \times \dfrac{1}{z_1}} = \overline{1} = 1$.

   Or, $\overline{z_1 \times \dfrac{1}{z_1}} = \overline{z_1} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}$ d'après le point 2.

   On en déduit que $\overline{z_1} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z_1}\right)} = 1$.

   Par définition de l'inverse de $\overline{z_1}$, on en déduit que $\overline{\left(\dfrac{1}{z_1}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z_1}}$.
4. Cela résulte immédiatement des points 2 et 3, en écrivant que $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \times \dfrac{1}{z_2}$.
5. On montre par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$ : « $\overline{(z^n)} = \left(\overline{z}\right)^n$ » est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   Initialisation : Pour $n = 1$, l'égalité est évidente : $\overline{z} = \overline{z}$.
   Hérédité : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   $\overline{\left(z^{n+1}\right)} = \overline{(z^n \times z)} = \overline{(z^n)} \times \overline{z}$ (d'après le point 2)
   $= \left(\overline{z}\right)^n \times \overline{z}$ (d'après $\mathscr{P}(n)$)
   $= \left(\overline{z}\right)^{n+1}$.
   Ainsi, on a prouvé que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

□

# III. Équations dans $\mathbb{C}$

## 1. Équations polynomiales de degré 1

**Méthode – Résoudre une équation de degré 1**

- Si $z$ ou $\overline{z}$ intervient seul, on résout de la même manière que dans $\mathbb{R}$.
- Si $z$ et $\overline{z}$ interviennent simultanément, on pose $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) et on utilise la propriété 1 d'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

**Exemple 7.**
*Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

1. $3\overline{z} + 2i = 5\overline{z}$
2. $4 + i + 2z = i\overline{z}$

*Solution :*

1. *Soit $z \in \mathbb{C}$ :*

$$\begin{aligned} & 2i = 5\overline{z} - 3\overline{z} \\ \iff\ & 2i = 2\overline{z} \\ \iff\ & \overline{z} = i \\ \iff\ & z = -i \end{aligned}$$

2. *Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).*

$$\begin{aligned} & 4 + i + 2z = i\overline{z} \\ \iff\ & 4 + i + 2(a + ib) = i(a - ib) \\ \iff\ & 4 + i + 2(a + ib) = ia + b \\ \iff\ & 4 + i + 2(a + ib) - ia - b = 0 \\ \iff\ & 4 + 2a - b + i(1 + 2b - a) = 0 \\ \iff\ & \begin{cases} 4 + 2a - b = 0 \\ 1 + 2b - a = 0 \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases} \\ \iff\ & z = -3 - 2i \end{aligned}$$

## 2. Équations polynomiales de degré 2

### a. Racines carrées dans $\mathbb{C}$

**Définition 1.8**

Soit $\omega = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle racine carrée de $\omega$ tout nombre complexe $z$ tel que $z^2 = \omega$.

**Proposition 1.9 – (admise)**

Tout nombre complexe $\omega$ non nul admet exactement deux racines carrées opposées l'une de l'autre.

**Remarque** (Attention!). *Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de notion d'ordre, ou de signe. Ainsi, si $\omega$ n'est pas réel, on ne peut pas choisir entre les deux racines carrées, une qui serait plus « canonique » que l'autre. On dira toujours **LES** racines carrées de $\omega$ ou **UNE** racine carrée de $\omega$. Pour la même raison, on n'écrira jamais, par exemple, $\sqrt{1+i}$.*

**Méthode – Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe $\omega$**

- On pose $z = x + iy$ tel que $z^2 = \omega$
- On utilise le fait que $(x+iy)^2 = \omega$ (en développant) et le fait que $|z| = \omega$
- On résout le système pour trouver $x$ et $y$.

**Exemple 8.** *Déterminer les racines carrées de $z = 5 + 3i$.*
*Solution :*
*D'après le cours, $5+3i$ admet deux racines carrées. On pose $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) tel que $\delta^2 = 5 + 3i$.*
*On a $\delta^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Ainsi,*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ 2xy = 3 & (2) \end{cases}$$

*De plus, $|\delta|^2 = |\delta^2|$. Cela implique que :*

$$x^2 + y^2 = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34} \qquad (3)$$

*En sommant les égalités (1) et (3), on obtient :*

$$2x^2 = \sqrt{34} + 5$$

*D'où*

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{34}+5}{2}}.$$

*De même, en faisant la différence des égalités (1) et (3), on a :*

$$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{34}-5}{2}}.$$

*Ainsi, comme x et y sont de même signe (égalité 2), les deux racines carrées de $5+3i$ sont :*

$$\sqrt{\frac{\sqrt{34}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{34}-5}{2}} \quad et \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{34}+5}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{34}-5}{2}}$$

### b. Équations de degré 2 dans $\mathbb{R}$ (rappels sur la forme canonique)

- **Résolution de $x^2 - 4 = 0$**
- **Résolution de $x^2 - 5 = 0$**
- **Résolution de $3x^2 - 1 = 0$**
- **Résolution de $5x^2 + 1 = 0$**
- **Résolution de $x^2 - 2x + 1 = 0$**
- **Résolution de $x^2 - 6x + 9 = 0$**
- **Résolution de $x^2 - 6x + 8 = 0$**
- **Résolution de $x^2 - 6x + 10 = 0$**
- **Résolution de $x^2 + 10x - 5 = 0$**
- **Résolution de $x^2 - 5x = -2$**
- **Résolution de $3x^2 - 6x + 9 = 0$**
- **Résolution de $4x^2 = 1 - 7x$**

### c. Équations de degré 2 dans $\mathbb{C}$

**Proposition 1.10 – S**

ient $a, b, c$ des nombres complexes tels que $a \neq 0$. Alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet pour solutions :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

où $\delta$ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
De plus,

- si $\Delta \neq 0$, $z_1$ et $z_2$ sont deux solutions distinctes.
- si $\Delta = 0$, $z_1$ et $z_2$ sont confondues i.e. $z_1 = z_2$.

*Démonstration.* Soient $a$, $b$, $c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\Bigg(\underbrace{z^2+2\times\frac{b}{2a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\Bigg)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right)\\
&= a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la règle du produit nul :

$$az^2+bz+c=0 \Longleftrightarrow z=\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z=\frac{-b-\delta}{2a}$$

De plus, $z_1 = z_2$ si, et seulement si $\delta = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\Delta = 0$. □

**Exemple 9.** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E) *:* $z^2+2iz-i=0$.

*Solution :*
$\Delta = b^2-4ac = (2i)^2-4\times1\times(-i) = -4+4i$. *D'après le cours,* $\Delta$ *admet deux racines carrées : on pose alors* $\delta = x+iy \in \mathbb{C}$ *tel que* $\delta^2 = \Delta$.
*On a* $(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$. *Ainsi,*

$$\begin{cases} x^2-y^2=-4 & (1)\\ 2xy=4 & (2)\end{cases}$$

*De plus,* $|\delta^2| = |\delta|^2$ *ce qui implique :*

$$x^2+y^2=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{32}. \ (3)$$

*On en déduit alors, par somme des égalités* (1) *et* (3) *:*

$$2x^2=-4+\sqrt{32}$$

*D'où*

$$x=\pm\sqrt{\frac{4+\sqrt{32}}{2}}=\pm\sqrt{2\sqrt{2}+2}$$

*De l'égalité* (2)*, on déduit :*

$$y = \frac{4}{2x} = \pm\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

*Ainsi, il suffit de prendre*

$$\delta = \sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}.$$

*Les solutions de* (E) *sont donc :*

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + \left(-1+\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}\right)i$$

*et*

$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + \left(-1-\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}\right)i$$

# IV. Binôme de Newton

## 1. Coefficients binomiaux

**Définition 1.9**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **factorielle** de $n$ le nombre :

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

**Définition 1.10**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit A un ensemble à $n$ éléments.

Le **coefficient binomial** « $k$ parmi $n$ », noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de sous-ensemble de A ayant $k$ éléments.

**Exemple 10.**

$\binom{n}{n} = 1$ ; $\binom{n}{1} = n$ ; $\binom{n}{0} = 1.$

**Proposition 1.11**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Remarque.**
*La Proposition 1.11 permet de calculer directement un coefficient binomial. Les calculs de factorielles sont toutefois fastidieux et l'intérêt de cette formule est donc surtout théorique.*

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.
Pour choisir une liste de $k$ éléments parmi un ensemble de $n$ éléments, on commence par choisir un premier élément. Il y a $n$ possibilités. Ensuite, on choisit un second élément. Il y a $n-1$ possibilités. On choisit comme cela chaque élément jusqu'au $k^{\text{e}}$ élément pour lequel il y a $n-k+1$ possibilités.
Au total, il y a donc $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ possibilités.
On a ici choisi une liste de $k$ éléments parmi $n$ éléments pour laquelle l'ordre du choix importe. En revanche, dans un ensemble, l'ordre des éléments n'importe pas. Le nombre de possibilités que nous avons déterminé compte donc plusieurs fois le même ensemble.
Or, pour ordonner $k$ éléments donnés, il y a $k \times (k-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = k!$ possibilités. Il faut donc diviser le nombre de possibilités trouvé par $k!$.
Ainsi, on obtient : $\dbinom{n}{k} = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. □

**Exemple 11.**
$\dbinom{7}{2} = \dfrac{7!}{2! \times (7-2)!} = \dfrac{7!}{2! \times 5!} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21.$

**Proposition 1.12 – Relation de Pascal**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

**Remarque.**
*La relation de Pascal (Proposition 1.12) est une relation de récurrence. Elle nécessite de calculer tous les coefficients binomiaux précédents mais permet d'éviter le calcul des factorielles.*

*Démonstration.*
Soit A un ensemble à $n+1$ éléments. On considère un élément fixé que l'on note $x_1$.
Il y a $\dbinom{n+1}{k+1}$ sous-ensembles de A ayant $k+1$ éléments.
On va calculer ce nombre de sous-ensembles d'une autre façon afin d'établir la formule annoncée.
Pour choisir un sous ensemble de A ayant $k+1$ éléments, on peut commencer par choisir si $x_1$ appartient à ce sous ensemble.
Si $x_1$ appartient au sous-ensemble, il reste alors à choisir $k$ éléments parmi les $n$ restants.
Il y a $\dbinom{n}{k}$ possibilités.

Si $x_1$ n'appartient pas au sous-ensemble, il reste à choisir $k+1$ éléments parmi les $n$ restants. Il y a $\binom{n}{k+1}$ possibilités.

Au total, le nombre de sous-ensembles possibles est $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, d'où le résultat. □

**Remarque.**
*La relation de Pascal permet de construire le tableau suivant appelé* ***triangle de Pascal****.*
*Chaque coefficient s'obtient en ajoutant le coefficient au dessus de lui et celui à gauche de ce dernier.*

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

*D'après le tableau, on sait par exemple que* $\binom{4}{2} = 6$.

**Histoire – Coefficients binomiaux**

On désigne généralement par « triangle de Pascal » le tableau décrit ci-dessus. Ce triangle était en réalité déjà connu en Orient et au Moyen-Orient plusieurs siècles avant la publication de Blaise Pascal. Il était connu des mathématiciens persans au Xe siècle mais aussi en Chine à partir du XIIIe siècle. Plus tard, au XVIIe siècle, l'apport de **Blaise Pascal** (1623-1662) sera de proposer une démonstration rigoureuse de la relation qui portera son nom. Pour la démontrer, il met en place une version aboutie du raisonnement par récurrence.

## 2. Formule du binôme de Newton

**Proposition 1.13 – Binôme de Newton**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

*Démonstration.*
On montre par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$ : « Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n = 1$,
$(a+b)^1 = a+b$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{n-k} = \binom{1}{0}a^0b^1 + \binom{1}{1}a^1b^0 = a+b$.
Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$.
Autrement dit, on souhaite montrer que le coefficient devant $a^k b^{n+1-k}$ dans le développement de $(a+b)^{n+1}$ est $\binom{n+1}{k}$.
En fait : $(a+b)^{n+1} = (a+b)\times(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n$
$= a\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) + b\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right)$
$= a\Big(b^n + \ldots + \binom{n}{k}a^k b^{n-k} + \ldots a^n\Big) + b\Big(b^n + \ldots + \binom{n}{k}a^k b^{n-k} + \ldots a^n\Big)$
$= \Big(ab^n + \ldots + \binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \ldots a^{n+1}\Big) + \Big(b^{n+1} + \ldots + \binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + \ldots ba^n\Big)$

Ainsi, dans la deuxième parenthèse, le coefficient devant $a^k b^{n+1-k}$ est $\binom{n}{k}$.
De plus, dans la première parenthèse, le coefficient devant $a^k b^{n+1-k}$ est $\binom{n}{k-1}$.
Au total, cela signifie que le coefficient devant $a^k b^{n+1-k}$ est :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

D'après la relation de Pascal (Proposition 1.12), ce coefficient est en fait égal à $\binom{n+1}{k}$.
Finalement, cela signifie que $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$ et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

□

**Exemple 12.**

1. *Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ :*

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^0b^5 + \binom{5}{1}a^1b^4 + \binom{5}{2}a^2b^3 + \binom{5}{3}a^3b^2 + \binom{5}{4}a^4b^1 + \binom{5}{5}a^5b^0 \\ &= b^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b + a^5\end{aligned}$$

2. *Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ :*

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a+(-b))^3 \\ &= \binom{3}{0}a^0(-b)^3 + \binom{3}{1}a^1(-b)^2 + \binom{3}{2}a^2(-b)^1 + \binom{3}{3}a^3(-b)^0 \\ &= -b^3 + 3ab^2 - 3a^2b + a^3\end{aligned}$$

**Histoire – Binôme de Newton**

La formule du « binôme de Newton » était en réalité connue bien avant Newton. Dès le Xᵉ siècle, elle est utilisée par des mathématiciens indiens (**Halayudha**), arabes et perses (**Al-Karaji**) et au XIIIᵉ siècle, le mathématicien chinois **Yang Hui** la démontra indépendamment. En 1665, l'apport d'**Isaac Newton** (1642-1727) a en fait été de la généraliser à des exposants non entiers.

# V. Repérage des nombres complexes dans le plan

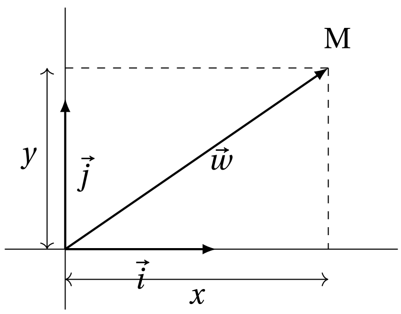
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

## 1. Affixe d'un point et affixe d'un vecteur

**Définition 1.11**

Soit M le point du plan de coordonnées $(x;y)$.

- On appelle **affixe du point M** le nombre complexe $x+iy$.
- On appelle **affixe du vecteur $\vec{w}$** l'affixe du point M tel que $\vec{w}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.




**Histoire – Représentation des nombres complexes**

Dès la fin du XVIIᵉ siècle, il semble que **Carl Friedrich Gauß** fait eu l'idée de représenter les nombres complexes dans le plan. On trouve en tout cas cette idée dans des lettres datées de 1797. Gauss ne publiera cependant rien à ce sujet et c'est en 1806 que le mathématicien suisse et amateur **Jean Robert Argand** (1768-1822) publie un traité intitulé *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires par des constructions géométriques*. Cet essai tombe toputefois assez vite dans l'oubli et les noms de **Gauß** et de **Cauchy** seront par la suite bien plus souvent associés à la représentation géométrique des nombres complexes que ne l'est celui d'**Argand**.

**Proposition 1.14**

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}$ et $z_{\mathrm{B}}$.

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$.
- Le milieu I de [AB] a pour affixe $z_{\mathrm{I}} = \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}}}{2}$.

**Exemple 13.**
*Soit A le point d'affixe* $z_A = 2 - 3i$ *et B le point d'affixe* $z_B = -1 + 5i$.
*Calculer l'affixe du vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

*Solution :*

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= (-1 + 5i) - (2 - 3i) \\ &= -1 + 5i - 2 + 3i \\ &= -3 + 8i \end{aligned}$$

**Proposition 1.15**

Soient $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Le vecteur $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ a pour affixe $z_1 + z_2$.
- Le vecteur $\lambda \vec{w}_1$ a pour affixe $\lambda z_1$.

**Exemple 14.**
*Soient* $\vec{w}_1$ *d'affixe* $z_1 = 3i + 5$ *et* $\vec{w}_2$ *d'affixe* $z_2 = 1 - i$. *Calculer l'affixe du vecteur* $3\vec{w}_1 + \vec{w}_2$.

*Solution :*
*L'affixe de* $3\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ *est :*

$$\begin{aligned} 3z_1 + z_2 &= 3 \times (3i + 5) + (1 - i) \\ &= 9i + 15 + 1 - i \\ &= 16 + 8i \end{aligned}$$

## 2. Module d'un nombre complexe

**Proposition 1.16**

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe et M le point d'affixe $z$.
Le module de $z$ vérifie

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{OM}$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle OMH, où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. □

**Exemple 15.**
*Si* $z = 1 - 3i$, *on a* $|z| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

**Proposition 1.17**

Soient A et B deux points d'affixes $z_A$ et $z_B$. Alors,

$$AB = |z_B - z_A|.$$

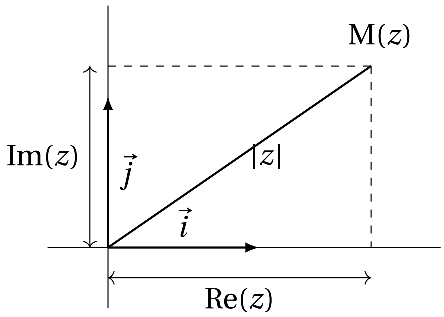
*Démonstration.*
Cela découle du fait que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. □

**Proposition 1.18**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

- $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$
- $\mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$
- $z\overline{z} = |z|^2$

*Démonstration.*
Les deux premiers points sont assez clairs sur le dessin ci-dessous.




Pour le troisième point, il s'agit simplement du fait que si $z = x + iy$, on a :

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

□

**Proposition 1.19**

Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes et $n$ un entier naturel non nul. Alors :

- $|\overline{z_1}| = |z_1|$
- $|-z_1| = |z_1|$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (si $z_2 \neq 0$)
- $|z^n| = |z|^n$

*Démonstration.*
Il suffit d'écrire les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ sous la forme $z = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ et de calculer chacun des termes afin de prouver les différentes égalités. □

**Exemple 16.**
*Calculer le module de* $z = \dfrac{1-i}{3+2i}$.

*Solution :*

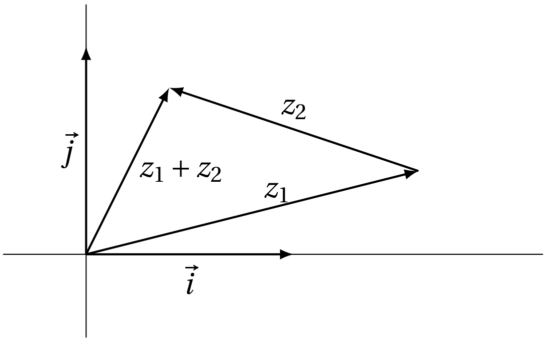
$$|z| = \left|\frac{1-i}{3+2i}\right| = \frac{|1-i|}{|3+2i|} = \frac{\sqrt{1^2+(-1)^2}}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{2}{13}}$$

**Proposition 1.20 – Inégalité triangulaire**

Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ :

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

**Remarque.**
*Le nom de cette propriété est justifiée par le fait que si l'on considère trois vecteur d'affixes* $z_1$*,* $z_2$ *et* $z_1+z_2$*, l'inégalité illustre l'inégalité classique entre les côtés d'un triangle.*




*Démonstration.*
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2| &\iff (|z_1+z_2|)^2 \leqslant (|z_1|+|z_2|)^2 \quad \text{(car la fonction carrée est strict. croiss. sur } \mathbb{R}^+\text{)}\\
&\iff |z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\
&\iff (z_1+z_2)\times\overline{(z_1+z_2)} \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\
&\iff z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\
&\iff |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\
&\iff 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leqslant 2|z_1||z_2|\\
&\iff \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leqslant |z_1\overline{z_2}|
\end{aligned}$$

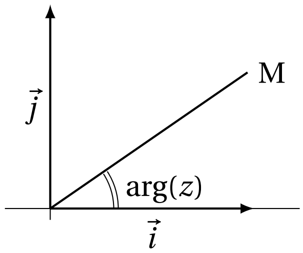
Cette dernière inégalité est toutjours vraie car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$. □

## 3. Argument d'un nombre complexe

**Définition 1.12**

Soit $z$ un nombre complexe non nul et M le point d'affixe $z$.

- Un **argument de** $z$, noté $\arg(z)$, est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.
- Un argument d'un nombre complexe n'est pas unique.
  Plus précisément, tous les arguments de $z$ diffèrent d'un multiple de $2\pi$.
- On appelle **argument principal** de $z$ l'argument appartenant à $]-\pi;\pi]$.




**Exemple 17.**
*En plaçant* $-2$ *et* $5i$ *dans un repère, on voit que :*

- $\arg(-2) = \pi$
- $\arg(5i) = \dfrac{\pi}{2}$

**Proposition 1.21**

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ :

- $\arg(z) = 0\,[2\pi] \iff z \in \mathbb{R}^+$.
- $\arg(z) = \pi\,[2\pi] \iff z \in \mathbb{R}^-$.
- $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \iff z \in i\mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(z) > 0$.
- $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \iff z \in i\mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(z) < 0$.

**Proposition 1.22**

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$.

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \;\; [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \;\; [2\pi]$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \;\; [2\pi]$

*Démonstration.*

- Les deux premiers points sont assez clairs en faisant un dessin.
- Le troisième point sera démontré plus tard dans le chapitre à l'aide de la forme exponentielle d'un nombre complexe).

□

**Proposition 1.23 – (admise)**

Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts et d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$. Alors :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

# VI. Forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe

## 1. Forme trigonométrique

**Proposition 1.24**

Soit $z = x + iy$. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
On a alors les formules suivantes :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

**Définition 1.13**

Soit $z$ un nombre complexe non nul. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
On a alors ,

$$z = r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$$

Il s'agit de la **forme trigonométrique de $z$**.

**Méthode – Calculer la forme trigonométrique d'un nombre complexe**

- Déterminer le module $r$.
- Calculer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ afin d'en déduire la valeur de $\theta$.
- Écrire la formule trigonométrique :

$$z = r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$$

.

**Exemple 18.**

1. *Déterminer la forme algébrique de* $z = 5 \times (\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.
2. *Déterminer la forme trigonométrique de* $z = 1 - i\sqrt{3}$.

*Solution :*

1. $z = 5 \times (-1 + i \times 0) = -5$.

2. *On a* $z = 1 - i\sqrt{3}$.
   *On commence par déterminer* $r = |z|$ *et* $\theta = \arg(z)$.
   *D'une part,* $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
   *D'autre part,* $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{2}$ *et* $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.
   *Ainsi, on voit que* $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.
   *Finalement, la forme trigonométrique de z est :*

$$z = 2 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

## 2. Forme exponentielle

**Définition 1.14**

Pour tout réel $\theta$, on définit l'**exponentielle complexe** de $\theta$ par :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

**Proposition 1.25**

Soit $z$ un nombre complexe non nul. Si on note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, on a alors ,

$$z = re^{i\theta}$$

*Démonstration.*
La forme trigonométrique de $z$ est $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
Comme $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$, on en déduit directement que $z = re^{i\theta}$. □

**Proposition 1.26 – (admise)**

Pour tout réel $\theta_1$ et $\theta_2$, on a :

$$e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

**Remarque.**
*Cette relation est identique à celle vérifiée par la fonction exponentielle réelle et justifie donc que l'on ait utilisé le nom d'exponentielle complexe ici.*

*Démonstration.*
La propriété découle en fait des formules donnant le cosinus et le sinus d'une somme. En effet :

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} &= (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \times (\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\
&= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i\big(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\big) \\
&= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}$$

□

**Remarque.**
*La propriété précédente permet de démontrer que* $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ *(voir propriété 9)*

**Proposition 1.27 – Formule de Moivre**

Pour tout réel $\theta$ et tout entier $n$, on a :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

**Remarque.**

- *La forme exponentielle est à privilégier pour calculer des produits de nombres complexes.*
- *La forme algébrique est à privilégier pour calculer des sommes de nombres complexes.*

**Exemple 19.**
*Soit* $z = -2 - 2i$.

1. *Déterminer la forme exponentielle de* $z$.
2. *Calculer* $z^4$.

*Solution :*

1. *On détermine la forme exponentielle de* $z$ *:*
   $r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
   $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ *Ainsi,* $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$ *et on a donc* $z = 2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}$.
2. $$\begin{aligned} z^4 &= \left(2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \\ &= \left(2\sqrt{2}\right)^4 \times \left(e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \\ &= 2^4 \times \left(\sqrt{2}\right)^4 \times e^{4\times -3i\frac{\pi}{4}} \\ &= 16 \times 4 \times e^{-3i\pi} \\ &= 16 \times 4 \times (-1) \\ &= -64 \end{aligned}$$

**Proposition 1.28 – Formules d'Euler**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

*Démonstration.*
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) + (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2} \\ &= \frac{2\cos(\theta)}{2} \\ &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Le calcul est similaire pour prouver la deuxième égalité. □

**Histoire – Exponentielle complexe**

La notation $i$ n'a pas été utilisée dès le départ.
En 1748, **Leonhard Euler** énonce la formule $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ puis les formules qui portent aujourd'hui son nom. A noter que ces formules ont donc été découvertes avant l'interpretation géométrique des nombres complexes. Euler a en fait plutôt utilisé des considérations algébriques. Pour rappel, c'est également lui qui décida d'introduire la notation $i$ afin d'éviter les ambiguités de la notation $\sqrt{-1}$.

## 3. Applications des nombres complexes à la trigonométrie

**Méthode – Linéariser $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$**

Linéariser une expression, c'est transformer une puissance en une combinaison linéaire de cosinus de la forme $\cos(nx)$.

- Utiliser les formules d'Euler
- Développer
- Simplifier et rassembler les termes afin d'utiliser de nouveau les formules d'Euler.

**Exemple 20.**
*Linéariser* $\cos^3(x)$.

*Solution :*

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\\ &= \frac{(e^{ix})^3+3(e^{ix})^2e^{-ix}+3e^{ix}(e^{-ix})^2+(e^{-ix})^3}{8}\\ &= \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}\\ &= \frac{1}{4}\times\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ &= \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\sin(3x)\end{aligned}$$

**Remarque.**
*Linéariser* $cos^n(x)$ *ou* $\sin^n(x)$ *permet par exemple d'en calculer une primitive et peut donc être utile dans les calculs d'intégrales.*

**Proposition 1.29 – Formules d'addition**

Soient $a$ et $b$ deux réels.

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

*Démonstration.* La preuve est laissée au lecteur. □

**Histoire – Formules d'addition**

Au Xᵉ et XIᵉ siècle, la trigonométrie devient une discipline à part entière dans le monde musulman en se détachant de l'astronomie. C'est à cette époque que le mathématicien **Abu Al-Wafa** découvre des formules comparables aux formules d'addition du sinus. Par la suite, **Omar Khayam** (1048-1131) va également utiliser la trigonométrie pour résoudre des équations algébriques à l'aide de méthodes géométriques.

**Proposition 1.30 – Formules de duplication**

Soit $a$ un réel.

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

*Démonstration.* Il s'agit d'une application directe de la Proposition 1.29 (formules d'addition) pour $a = b$. □

## VII. Racines $n^e$

**Définition 1.15**

On appelle **cercle unité** et on note $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1. On a donc :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}.$$

**Proposition 1.31**

Si $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U}$, alors $\quad zz' \in \mathbb{U} \quad$ et $\quad \dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$

**Remarque.**
*On dit que $\mathbb{U}$ est stable par multiplication et par division. Il n'est en revanche pas stable par addition.*

**Définition 1.16**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **racine nᵉ de l'unité** et on note $\mathbb{U}_n$ les solutions de l'équation $z^n = 1$.

**Proposition 1.32**

$\mathbb{U}_n$ est composé d'exactement $n$ éléments.
De plus,

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}.$$

*Démonstration.*

- On commence par montrer que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine de l'équation $z^n = 1$. En fait :

$$\begin{aligned}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n &= e^{\frac{2ik\pi}{n}\times n} \text{ (d'après la formule de Moivre)}\\ &= e^{2ik\pi}\\ &= \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)\\ &= 1\end{aligned}$$

.

- On va ensuite montrer que l'ensemble $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$ possède exactement $n$ éléments. Pour cela, on va montrer que si $k$ et $k'$ sont deux entiers distincts, alors $e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$.
  Par contraposée, supposons que $k$ et $k'$ soient des entiers tels que $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$.
  Alors $\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{2ik'\pi}{n}}} = 1$
  Donc $e^{2i(k-k')\pi n} = 1$ Donc $n$ divise $k-k'$.
  Comme $|k-k'| \leqslant n-1$, on en déduit que $k-k' = 0$, c'est-à-dire $k = k'$.
  Ainsi, on a bien montré que l'ensemble $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$ possède exactement $n$ éléments.
- Finalement, on a déterminé $n$ racines de l'équation $z^n = 1$. Comme elle est de degré $n$, elle ne peut pas posséder d'autres racines et on a donc

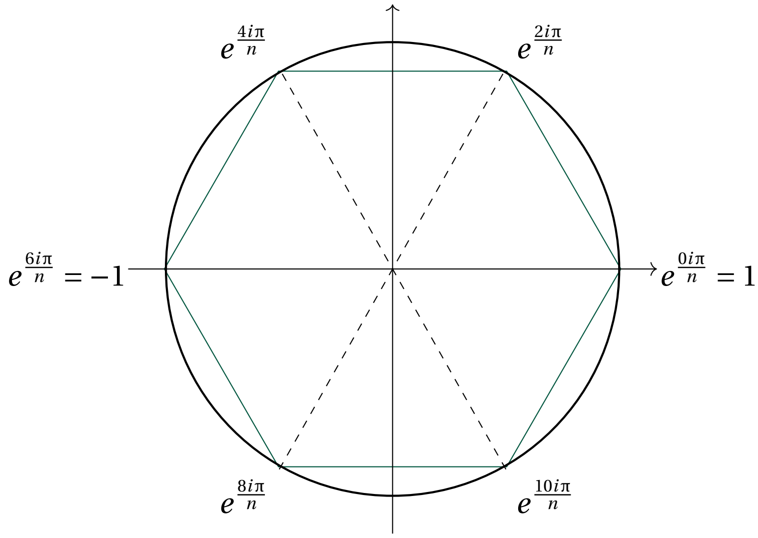
$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}.$$

□

**Exemple 21.**

- $\mathbb{U}_2 = \{1\,;-1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \{1\,;j\,;j^2\}$ *avec* $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
- $\mathbb{U}_4 = \{1\,;i\,;-1\,;-i\}$

**Remarque.**
*Si $n \geqslant 3$, alors les points dont les affixes sont des racines $n^e$ de l'unité forment un polygone régulier à $n$ côtés. Par exemple, le dessin ci-dessous représente les racines de l'unité pour $n = 6$.*




**Méthode – Déterminer les racines $n^e$ d'un nombre complexe**

Utiliser la forme exponentielle afin de déterminer une solution particulière.
Se ramener ensuite aux racines de l'unité.

**Remarque.** *Les racines $n^e$ d'un nombre complexe donné forment toujours un polygone régulier.*

**Exemple 22.** *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1 + i\sqrt{3}$.*

*Solution :*

- *On commence par chercher une solution de la forme $z = re^{i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$). On a :*

$$z^5 = 1 + i\sqrt{3} \iff r^5 e^{5i\theta} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

*Il suffit ainsi de prendre $r = \sqrt[5]{2}$ et $\theta = \pi 15$.*
*Ainsi, le nombre complexe $z_0 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{i\pi}{15}}$ est une solution.*

- *Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$.*

$$\begin{aligned}
& z^5 = 1 + i\sqrt{3} \\
\iff & z^5 = z_0^5 \\
\iff & \left(\frac{z}{z_0}\right)^5 = 1 \\
\iff & \frac{z}{z_0} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \qquad \text{(avec } k \in \{0,1,2,3,4\}\text{ )} \\
\iff & z = \sqrt[5]{2}e^{\frac{i\pi}{15}} \times e^{\frac{2ik\pi}{5}} \qquad \text{(avec } k \in \{0,1,2,3,4\}\text{ )}
\end{aligned}$$

*Au final, l'ensemble des solutions est :*

$$S = \left\{ \sqrt[5]{2}e^{\frac{i\pi}{15}} , \sqrt[5]{2}e^{\frac{7i\pi}{15}} , \sqrt[5]{2}e^{\frac{13i\pi}{15}} , \sqrt[5]{2}e^{\frac{19i\pi}{15}} , \sqrt[5]{2}e^{\frac{5i\pi}{3}} \right\}$$

# Exercices

---

## Propriétés algébriques

**Exercice 1.** *Indiquer quelle est la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants. Déterminer ensuite leur module.*

a) $z = 3 + 2i$

b) $z = 1 - i$

c) $z = 5$

d) $z = i$

**Exercice 2.** *Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :*

a) $z = (1 + i) + (2 + i)$

b) $z = 2i - \left(-\frac{1}{2}i - 1\right) + 2 + i$

c) $z = i(1 - 2i)$

d) $z = -(3 + i)(-1 - 2i)$

e) $z = 2\left(-\frac{1}{2}i - 1\right)\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{5}i\right)$

f) $z = (2 + 2i)^2$

g) $z = i(1 - i)^2$

h) $z = (3 + 4i)^3$

**Exercice 3.**

1. *Donner la forme algébrique de* $i^{2023}$ *et de* $(-i)^{23}$.
2. *Soient* $x$ *et* $y$ *deux nombres réels et soit* $z = x + iy$*. Donner en fonction de* $x$ *et* $y$ *la forme algébrique de* $Z_1 = z^2$, $Z_2 = z^3$ *et* $Z_3 = \frac{1 - i}{z}$.

**Exercice 4.** *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et soit* $z = 3a^2 - 1 - i(a + 5)$

1. *Quelles sont les valeurs de a telles que* $z \in \mathbb{R}$ *?*
2. *Quelles sont les valeurs de a telles que* $z \in i\mathbb{R}$ *?*

**Exercice 5.** *Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :*

a) $z = 1 + i$

b) $z = -3 - 2i$

c) $z = 2i$

d) $z = i - 1$

**Exercice 6.** *La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier*
*Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\overline{3 + iz} = 3 - iz$.

**Exercice 7.** *Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :*

a) $z = \frac{1}{1 + i}$

*b)* $z = \dfrac{3+i}{5+2i}$

*c)* $z = -\dfrac{5i}{7-2i}$

*d)* $z = \dfrac{5+4i}{3-2i}$

*e)* $z = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$

*f)* $z = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 - \dfrac{3+6i}{3+4i}$

*g)* $z = \overline{\overline{1-3i}}$

*h)* $z = \overline{(1+i)^2}$

**Exercice 8.** *Existe-t-il des nombres réels $x$ et $y$ tels que :*

$$\begin{cases} xy = -2 \\ x+y = 7. \end{cases}$$

**Exercice 9.** *Existe-t-il des nombres réels $x$ et $y$ tels que :*

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x+y = 1. \end{cases}$$

**Exercice 10.** *Soit $z$ un nombre complexe tel que $z^2 = 1+i\sqrt{3}$. Déterminer $|z|$.*

## Résolution d'équations

**Exercice 11.** *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

*a)* $z+5i+1 = i-7z$

*b)* $3-2z = \dfrac{1}{3} - 4iz$

*c)* $z - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5i}{7} + \dfrac{z}{9}$

*d)* $z+3i = z-3i$

*e)* $z^2(3+i) = z(1-2i)$

*f)* $\overline{z} = 1-i-2\overline{z}$

*g)* $1-i\overline{z} = 4+\overline{z}$

*h)* $2\overline{z}-z = 3+iz$

*i)* $\overline{3z}+2i-1 = i-2z$

*j)* $z = \dfrac{2+5i}{1-i}z + \dfrac{2-5i}{1+i}$

**Exercice 12.** *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les système suivants :*

*a)* $\begin{cases} z_1+z_2 &= 3i \\ 2z_1-3z_2 &= 5 \end{cases}$

*b)* $\begin{cases} z_1+5z_2 &= i \\ 2\overline{z_1}-3\overline{z_2} &= 1 \end{cases}$

*c)* $\begin{cases} iz_1 + 5z_2 &= 2 \\ \overline{z_1} - 3i\overline{z_2} &= i \end{cases}$

*d)* $\begin{cases} z_1 + z_2 &= 1 \\ 4z_1 - 3i\overline{z_2} &= 4 \end{cases}$

**Exercice 13.** *Déterminer les racines carrées des nombres suivant :*

*a)* $9$

*b)* $-25$

*c)* $-3$

*d)* $8-6i$

*e)* $-1-i$

*f)* $\frac{1}{2}+7i$

*g)* $1+\sqrt{3}i$

**Exercice 14.** *Résoudre les équations du second degré suivantes dans* $\mathbb{C}$ *:*

*a)* $z^2+z+1=0$

*b)* $z^2+z-1=0$

*c)* $z^2+(3-6i)z-8-6i=0$

*d)* $(1+i)z^2+(7-3i)z-10i=0$

*e)* $z^2+iz-7=0$

*f)* $iz^2+(i+3)z-7=0$

**Exercice 15.** *Résoudre l'équation suivante dans* $\mathbb{C}$ *en commençant par chercher une solution imaginaire pure :*

$$z^2+\left(-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right)z-\sqrt{2}\,(1+i)=0.$$

**Exercice 16.** *Résoudre les équations suivantes dans* $\mathbb{C}$ *:*

*a)* $9z^4-3iz^2-1-i=0$

*b)* $4\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2-2idfracz-1z+1-1-i=0$

**Exercice 17.** *Résoudre les équations du troisième degré suivantes dans* $\mathbb{C}$ *:*

*a)* $z^3-z^2+z-1=0$

*b)* $x^3+3x^2-21x-95=0$

*c)* $x^3-14x^2-12=0$

## Nombres complexes et géométrie

**Exercice 18.**

1. *Dans un repère orthonormé, placer les points A, B, C, D et E dont les affixes sont données ci-dessous :*
   - $z_{\mathrm{A}}=\sqrt{3}+i$
   - $z_{\mathrm{B}}=1+i$

- $z_C = -4i$
- $z_D = -3$
- $z_E = -1 + 2i$

*Déterminer par ailleurs leur module et leur argument.*

2. *Déterminer les affixes respectives des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{CE}$.
3. *Déterminer les longueurs AB, AE, BD et CE.*

**Exercice 19.** *Dans un repère orthonormé :*

1. *Représenter l'ensemble des points M d'affixes* $z$ *tels que* $Re(z) = 4$.
2. *Représenter l'ensemble des points N d'affixes* $z$ *tels que* $Im(z) \geqslant 0$.
3. *Représenter l'ensemble des points L d'affixes* $z$ *tels que* $Im(z) = Re(z)$.

**Exercice 20.** *Donner la forme algébrique et trigonométrique des nombres complexes suivants :*

*a)* $z = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

*b)* $z = -2e^{\frac{i\pi}{4}} \times e^{-\frac{3i\pi}{4}}$

*c)* $z = \dfrac{3e^{\frac{i\pi}{3}}}{2e^{\frac{5i\pi}{6}}}$

*d)* $z = \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^9$

*e)* $z = \left(\dfrac{1 - i}{4}\right)^{98}$

**Exercice 21.** *Linéariser les expressions suivantes :*

*a)* $\sin^5(x)$

*b)* $\cos(2x)\sin^2(3x)$

*c)* $\sin^2(2x)\cos^2(2x)$

**Exercice 22.** *En utilisant les nombres complexes, déterminer des expressions algébriques des nombres suivants :*

*a)* $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

*b)* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

**Exercice 23.**

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *avec* $x \neq 0\,[2\pi]$. *Montrer que* $\dfrac{1 + e^{ix}}{1 - e^{ix}} \in \mathbb{R}$.
2. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Montrer que*

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

3. *Énoncer et démontrer des formule similaires pour* $\cos(a) - \cos(b)$, $\sin(a) + \sin(b)$ *et* $\sin(a) - \sin(b)$.

**Exercice 24.**

1. *Déterminer l'expression de* $\cos(5x)$ *en fonction de* $\cos(x)$.
2. *En déduire la valeur de* $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, *de* $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *et de* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
3. *En déduire une construction à la règle (non graduée) et au compas d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.*

**Exercice 25.** *Soient* $A_1, \ldots, A_n$ *des points du plan. Peut-on trouver* $n$ *points* $B_1, \ldots, B_n$ *tels que* $A_1, \ldots, A_n$ *soient les milieux respectifs des segments* $[B_1B_2]$, $[B_2B_3]$, ..., $[B_nB_1]$ *?*

## Binôme de Newton

**Exercice 26.** *Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :*

1. $z = (1+i)^3$
2. $z = (5-2i)^3$
3. $z = (1+3i)^4$
4. $z = (-i-1)^6$

**Exercice 27.** *Calculer les sommes suivantes :*

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

**Exercice 28.** *L'objectif de l'exercice est de démontrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers naturels* $(x; y)$ *tels que* $x^2 - 2y^2 = 1$.

1. *Démontrer que pour tout* $n \geqslant 1$, *il existe des entiers* $x_n$ *et* $y_n$ *tels que* $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = x_n + \sqrt{2}y_n$.
2. *Exprimer* $x_{n+1}$ *et* $y_{n+1}$ *en fonction de* $x_n$ *et* $y_n$.
3. *En déduire que les suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont strictement croissantes.*
4. *En déduire qu'il existe bien une infinité de couples d'entiers naturels* $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ *tels que* $x^2 - 2y^2 = 1$.

## Racines $n^{\text{e}}$

**Exercice 29.** *Résoudre les équations suivantes (en écrivant les solutions sous forme exponentielle) :*

a) $z^9 = -512i$

b) $z^6 = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$

*c)* $z^5 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$

*Représenter les solutions dans le plan.*

**Exercice 30.** *On note* $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. *Résoudre l'équation* $z^8 + z^4 + 1 = 0$.
2. *Donner les racines quatrième de* $j$ *sous forme algébrique.*
3. *En déduire une factorisation de* $\mathrm{P}(z) = z^8 + z^4 + 1$ *comme produit de quatre polynômes de degré deux sans racine réelle.*